Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications

Ludovic Dan Lemle

▶ **To cite this version:**

Ludovic Dan Lemle. Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2007. Français. NNT : . tel-00139507

HAL Id: tel-00139507

https://theses.hal.science/tel-00139507

Submitted on 31 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'Ordre: D.U. 1728

UNIVERSITE BLAISE PASCAL DE CLERMONT-FERRAND

U.F.R. Sciences et Technologies

UNIVERSITE DE L'OUEST DE TIMIŞOARA

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

No 523

THESE EN COTUTELLE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité: MATHEMATIQUES (Analyse Fonctionnelle)

Par **LEMLE Ludovic Dan**

SEMI-GROUPES INTEGRES D'OPERATEURS, L'UNICITE DES PRE-GENERATEURS ET APPLICATIONS

Soutenue publiquement le 19 JANVIER 2007, devant la commission d'examen

Bernard CHEVREAU, Université Bordeaux 1, président
Gilles CASSIER, Université Claude Bernard de Lyon, examinateur
Dumitru GAŞPAR, Université d'Ouest de Timişoara, directeur de thèse
Mihail MEGAN, Université d'Ouest de Timişoara, examinateur
Jean PICARD, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, examinateur
Liming WU, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, directeur de thèse

Au mémoire de ma mère **Rozalia Maria LEMLE.**

Table des matière

Chapitre 1

Introduction

1.1 Une incursion dans le monde des semi-groupes d'opérateurs linéaires

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en autre, l'isomorphisme fondamental algèbrique et topologique entre le groupe topologique aditif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \longmapsto e^{ta}$, $a \in I\!R$, est une solution réele continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été etudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy même. D'autre part, il est très bien connu que la fonction exponentielle $t \longmapsto e^{ta}$ est la solution unique sur $I\!R$ de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance apres l'année 1888, quand le grand mathématicien Giuseppe Peano a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I \end{cases} ,$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \longmapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad .$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \longmapsto e^{tA}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.
Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modèle général dans le cadre des algèbres de Banach abstraites. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach avec l'unité I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction

$$I\!R \ni t \longmapsto e^{ta} \in \mathcal{B}$$

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = I \quad , \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{ta}$ satisfait sur $I\!R$ à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le problème reciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus difficile, mais il a été résolu par Nathan [**Na'35**] et Yosida [**Yo'36**]. Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algèbres de Banach abstraites.
Ces caractérisations importantes ont sugéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette manière est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un

espace de Banach $\mathcal{X}$. La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été realisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0. Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se réfère aux fonctions

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)t(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$. Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach ont été obtenus par HILLE [**Hi'36**], [**Hi'48**], [**Hi'52**], YOSIDA [**Yo'48**], [**Yo'57**], FELLER [**Fe'52**], [**Fe'53-2**], MIYADERA [**Mi'52**], [**Mi'56**] et PHILLIPS [**Ph'52**], [**HP'57**] qui ont crée la théorie des C_0-semi-groupes et de leurs générateurs. Le célébre théorème de Hille-Yosida-Feller-Miyadera-Phillips rétablit le lien entre l'équation fonctionnelle de Cauchy $T(t+s) = T(t)T(s)$ et l'équation différentielle $x' = Ax$, où A est un opérateur non-borné fermé et densément défini dans un espace de Banach $\mathcal{X}$. Dans ce cas-là, $T(t)$ représente dans un certaine sens la fonction exponentielle. Beaucoup de résultats intéressants concernant l'engendrement, la représentation, les propriétés spectrales et de convergence peuvent être trouveś dans les excellentes monographies de AHMED [**Ah'91**], BARBU [**Ba'76**], BUTZER et BERENS [**BB'67**] CLÉMENT, HEIJMANS, ANGENENT, VAN DUIJN et DE PATGER [**CHADP'87**], DAVIES [**Da'80**], PAZY [**Pa'83-1**], etc. Quelques problèmes spéciaux concernant les semi-groupes de classe C_0 sont donnés dans les travaux de CASSIER [**Ca'01**] ou GAŞPAR et WESTPHAL [**GW'74**] et une synthèse sur les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach est donnée dans LEMLE [**Le'03**].

Le moment le plus important concernant la généralisation des semi-groupes de classe C_0 est marqué par l'introduction des semi-groupes intégrés à la fin des années '80 (voir ARENDT [**Ar'87**]). Dans la théorie des semi-groupes intégrés un rôle important revient à un théorème classique de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec valeurs réelles, prouvé par WIDDER [**Wi'34**], [**Wi'71**]. Malheureusement, dans 1960 ZAIDMAN [**Za'60**] a prouvé que le théorème de Widder ne peut être étendu aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach arbitraire. Difficilement, en 1987 ARENDT [**Ar'87**, pag. 329] a prouvé un version "intégré" du théorème de Widder pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, avec lequel il a obtenu une caractérisation complète pour le générateur d'un semi-groupe intégré. Dans le cas des semi-groupes intégrés on peut voir que le générateur n'est pas nécessairement à domaine dense, comme on peut le voir dans les nombreux travaux parus dans les dernières années sur ce sujet. Pour plus de details, on peut consulter les travaux de BOBROWSKI [**Bo'94**], DE LAUBENFELS [**DL'89**], HIEBER [**Hi'91-1**] et [**Hi'91-2**], KELLERMAN et HIEBER [**KH'89**], MIJATOVIĆ, PILIPOVIĆ et VAJZOVIĆ [**MPV'97**], NEUBRANDER [**Ne'88**], NICAISE [**Ni'93**], PENG et CHUNG [**PC'98**], THIEME [**Th'90**], etc. Une étude comparative concernant les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés sur les espaces de Banach peut être trouvée dans LEMLE [**Le'05**].

1.2 Les opérateurs de diffusion et le semi-groupe de Feynman-Kac

Soient D un ensemble ouvert dans $I\!R^d$ et $\mathcal{D}$ un espace des functions sur D, par exemple $\mathcal{D} = C_0^\infty(D)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur D avec un support compact. $\mathcal{D}$ s'appelle l'espace des *fonctions test.* Un opérateur densément défini $(\mathcal{A}, \mathcal{D})$

$$\mathcal{A}f = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

avec les coefficients mesurables $a_{ij}, \beta_j : D \to I\!R^d$ tel que la matrice $(a_{ij}(x))$ est définie positive (dans un sens non-strict) pour tout $x \in D$, s'appelle un *opérateur de diffusion.* La théorie des opérateurs de diffusion a été dévelopée par STROOCK et VARADHAN [**SV'79**]. Outre leur importance théorique dans l'analyse et les probabilités, les

opérateurs de diffusion fini-dimensionnels sont présents dans beaucoup d'applications, incluant particulièrement la mécanique stochastique. De plus, les opérateurs de diffusion fini dimensionnels peuvent-être utilisés pour étudier le cas difficile des opérateurs de diffusion infini dimensionnels.
En particulier, il est bien connu que l'opérateur de Laplace (ou l'opérateur de Schrödinger libre)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

qui agit sur l'espace $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ des fonctions réelles indéfiniment dérivables avec un support compact, engendre un mouvement brownien libre $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}\right)$ avec $\mathbb{P}_x\left(B_0 = x\right) = 1$ quelque soit le point initial $x \in \mathbb{R}^d$, où $\mathbb{E}^x$ est l'espérance mathématique associée à $\mathbb{P}_x$. On peut prouver que pour tout $1 \leq p < \infty$, l'opérateur $\left(\Delta, C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est contenu dans le générateur $\mathcal{L}_{(p)}$ du C_0-semi-groupe du mouvement brownien $\{P_t\}_{t\geq 0}$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x f\left(B_t\right)$$

dans $L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ (voir [**BH'86**, p. 7]).
Soit D un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^d$ avec son bord ∂D. Considérons l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{A} = -\frac{\Delta}{2} + V$ sur l'espace $C_0^\infty(D)$, où Δ est l'opérateur de Laplace et $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel Borel mesurable. Soit $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ une famille donnée par

$$P_t^{D,V} f(x) := \mathbb{E}^x 1_{[t\leq\tau_D]} f(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s)ds}$$

où $\tau_D = \inf\{t > 0 \mid B_t \notin D\}$ est le temps d'arrêt et f est une fonction mesurable non négative (alors $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ est bien défini). La famille $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés dans $L^p(D, dx)$, pour $p \in [1, \infty]$, nommé le *semi-groupe de Feynman-Kac*. On peut prouver que $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^p(D, dx)$, pour $p \in [1, \infty)$ et son générateur $\mathcal{L}_{(p)}^{D,V}$ est une extension de l'opérateur de Schrödinger $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ (voir [**Wu'98**, Lemma 2.1, p.286]).

1.3 Motivation de l'étude de l'unicité

Notre principal but est le problème de l'unicité pour les opérateurs de diffusion dans l'éspace L^p, dans le cas spécial $p = \infty$. Les problèmes d'unicité pour les opérateurs de diffusion jouent un rôle crucial dans plusieurs champs de la physique-mathématique, incluant la mécanique quantique, les équations stochastiques aux dérivées partielles, les processus de diffusion sur une variété riemannienne, etc. L'importance de l'étude de l'unicité des opérateurs peut-être motivée par un exemple simple. Soit $C_0^\infty(I\!R^d)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables avec un support compact. On considère l'opérateur de Schrödinger

$$\mathcal{A} = \frac{\Delta}{2} - V$$

avec le domain $\mathcal{D} = C_0^\infty(I\!R^d)$, où $V : I\!R^d \to I\!R^d$ est un potentiel mesurable. On dit que $\mathcal{A}$ est un opérateur *essentiel auto-adjoint* sur $L^2(I\!R^d, dx)$ si sa fermeture est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $L^2(I\!R^d, dx)$. Il est bien connu (voir Kato [**Ka'84**], Reed et Simon [**RS'75**]) qu'on a équivalence entre:

(i) *la propriété essentiellement auto-adjointe de* $\mathcal{A}$: la fermeture de $\mathcal{A}$ dans $L^2(I\!R^d, dx)$ est le générateur du semi-groupe de Feymnan-Kac

$$P_t^V f(x) = I\!E^x f(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s)ds}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est le mouvement brownien avec le départ en x;

(ii) *l'unicité des solutions fortes pour le problème de Cauchy*: pour tout $x \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$, le problème de Cauchy (ou l'équation de Kolmogorov rétrograde)

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \overline{\mathcal{A}} v(t) \\ v(0) = x \end{cases}$$

a une $L^2(I\!R^d, dx)$-unique solution forte $v(t) = P_t^V x$;

(iii) *l'unicité des solutions faibles pour le probème de Cauchy dual*: pour tout $y \in L^2(I\!R^d, dx)$, le problème de Cauchy dual (ou l'équation de Kolmogorov progressive ou l'équation de Fokker-Planck)

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \mathcal{A}^* u(t) \\ u(0) = y \end{cases}$$

a une $L^2(I\!R^d, dx)$-unique solution faible $u(t) = P_t^V y$.
Compte tenu de ces équivalences, on peut dire que $\mathcal{A}$ est $L^2(I\!R^d, dx)$-*unique*. Il faut remarquer que si $f(x)$ est la distribution initiale de la chaleur, alors la solution $u(t,x)$ du problème de Cauchy dual est la distribution de la chaleur au moment t dans la position x. De plus

$$\int_{I\!R^d} |u(t,x)|dx = \|u(t,x)\|_{L^1}$$

est l'énergie totale du systéme au moment t. Donc il est très intéressant d'étudier la $L^1(I\!R^d, dx)$-unicité des solutions faibles du problème de Cauchy dual. La $L^p(I\!R^d, dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger pour $p \in (1, \infty)$ a été étudiée par Röckner [**Rö'98**], Eberle [**Eb'97**], Djellout [**Dj'97**] et l'unicité dans $L^1(I\!R^d, dx)$ a été étudiée par Stannat [**St'99**] et Wu [**Wu'98**].
Alors si on peut donner un sens pour $L^\infty(I\!R^d, dx)$-unicité de l'opérateur $\mathcal{A}$, on peut formuler la question suivante: il existe équivalence entre
(i) $L^1(I\!R^d, dx)$-unicité des solutions faibles du problème de Cauchy dual;
(ii) $L^\infty(I\!R^d, dx)$-unicité des solutions fortes du problème de Cauchy;
(iii) $L^\infty(I\!R^d, dx)$-unicité de l'opérateur $\mathcal{A}$?

Il faut remarquer que le semi-groupe de Feynman-Kac n'est pas de classe C_0 sur $L^\infty(I\!R^d, dx)$ par rapport à la topologie forte. En général pour un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace localement convexe $(\mathcal{X}, \beta)$, le semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas fortement continu sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ par rapport à la topologie forte $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ de l'espace dual (voir [**Yo'71**, Proposition 1, p.195]).
Pour obtenir la continuité forte du semi-groupe adjoint sur l'espace dual on a deux possibilités:
(i) on peut utiliser la théorie des semi-groupes intégrés sur $(\mathcal{X}, \beta)$ pour construire un semi-groupe adjoint sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ fortement continu par rapport à une topologie plus faible que la topologie $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$;
(ii) on peut introduire une nouvelle topologie sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ par rapport à laquelle $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ devient un C_0-semi-groupe.

Notre travail de thèse commence par un étude des semi-groupes d'opérateurs linéaires

dans un contexte très général. Dans le deuxième chapitre nous présentons quelques propriétés très bien connues des semi-groupes de classe C_0 sur un espace de Banach d'une manière qui permet une bonne connexion avec la classe des semi-groupes intégrés qui est étudiée dans le troisième chapitre. Il faut remarquer que dans la preuve du théorème de Hille-Yosida nous n'avons pas utiliser le procédé standard de renormalisation. De même, nous avons donné une preuve élémentaire pour le théorème de Arendt qui caractérise les générateurs des semi-groupes intérgés non-dégénérés.
Le quatrième chapitre présente les générateurs essentiels. Nous étudions les semi-groupes de classe C_0 sur un espace localement convexe et nous introduisons une nouvelle topologie sur l'espace dual tel que l'adjoint d'un C_0-semi-groupe est de classe C_0 par rapport à cette topologie. Les résultats les plus importants de ce chapitre sont un théorème de caractérisation d'un core dans le cas des C_0-semi-groupes sur un espace localement convexe et un théorème de caractérisation complet d'un générateur essentiel sur un espace localement convexe.
Enfin, dans le dernier chapitre nous présentons quelques exemples des générateurs essentiels dans L^∞ qui interviennent dans la physique mathématique. Dans cette thèse ont été obtenues pour la première fois la L^∞-unicité des opérateurs de Schrödinger et des opérateurs de Schrödinger généralisés sur une variété riemannienne complète, ainsi que L^1-unicité des solutions faibles pour l'équation de transport de masse.

Remerciements.

Je veux profiter de cette occasion pour présenter mes remerciements à Monsieur Liming WU de l'Université "Blaise Pascal" de Clermont-Ferrand pour le choix du sujet de la thèse, ses suggestions et son aide constante pendant mes études doctorales. Sans sa passion, ses idées et sa disponibilité, j'en serai pas là aujourd'hui. Particulièrement je veux remercie le professeur Liming Wu pour mes stages de recherche à l'Université de Wuhan, Chine, en 2004 et 2006, où une bonne partie de ce matériel a été exposé dans le Centre de Statistique et Probabilités.

En même temps, il convient d'exprimer ma gratitude à Monsieur Dumitru Gaşpar qui m'a donné l'occasion d'étudier dans deux très grandes universités européennes:

l'Université Claude Bernard de Lyon et l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. Il m'a fait découvrir et aimer la recherche, il a été porteur d'idées et de soutiens permanents.

Pendant mon stage à l'Université "Claude Bernard" de Lyon, en 2001, j'ai eu le plaisir de travailler avec Monsieur Gilles Cassier qui a été mon mentor en ce qui concerne les activités de recherche dans les grandes mathématiques. De même, je veux remercie le professeur Gilles Cassier pour l'honneur qu'il me fait d'être le rapporteur français de ma thèse, pour ses invitations au sein de l'Institut "Girard Desargues" en 2003, où j'ai donné quelques exposés et, aussi, pour sa relecture de ce manuscript. Ses suggestions pour améliorer l'exposition ont été bienvenues.

Je veux exprimer aussi ma reconnaissance à Monsieur Dan Timotin de l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine de Bucureşti pour ses excellents conseils pendant son séjour à Lyon, pour l'honneur d'être le rapporteur roumain de ma thèse et pour m'avoir aidé repérer et corriger quelques erreurs dans une version préliminaire de ce manuscript.

Merci à Messieurs Bernard Chevreau de l'Université de Bordeaux, Jean Picard de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et Mihail Megan de l'Université d'Ouest de Timişoara pour avoir accepté faire partie du jurry.

Il faut mentionner que tous mes efforts auraient été complétement inutiles sans le soutient de ma femme Ioana et de ma jeune fille Katerina qui ont supporté avec courage et patience mes absences pendant mes stages de recherche à l'étranger, compte tenu que je n'ai pas eu une bourse.

De même, je ne veux pas oublier d'adresser mes remerciements à quelques très bons amis et amies qui ont été chaque fois près de moi pendant le déroulement du travail de ma thèse: Laurian Suciu, Codruţa Şerban, Daciana Vlad, Flavius Turcu, Păstorel Gaşpar, Yiwen Jiang, Ma Yutao, Liangzhen Lei, Yuenian Leng, Mathieu Gourcy et Hacène Djellout. Et, bien sur, je dois adresser un mot d'admiration à Madame Noëlle Rouganne qui a résolu à chaque fois, avec une grande efficacité, tous mes problèmes administratifs à Clermont-Ferrand.

Finalement, je veux exprimer toute ma reconnaissance pour l'hospitalité et l'amabilité avec lesquelles j'ai été accueilli par toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de connaître pendant mes stages à Clermont-Ferrand, à Lyon et à Wuhan.

Chapitre 2

C_0-semi-groupes

2.1 Préliminaires

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$ et par I l'unité de $B(E)$.
Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ nous noterons par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(\mathcal{E})\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et par

$$R(\ .\ ; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 2.1.1 *On appelle C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad \forall t, s \geq 0$;
iii) $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}$.

Définition 2.1.2 *On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble:*

$$\mathcal{D}(A)=\left\{x\in\mathcal{E}\;\middle|\;\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\;\textit{existe}\;\right\}$$

par:

$$Ax=\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\quad ,\quad \forall x\in\mathcal{D}(A).$$

Exemple 2.1.3 Soit:

$$\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)=\{\,f:[0,\infty)\to I\!R|\,f\;\textit{est uniformément continue et bornée}\}\quad .$$

Avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}|f(\alpha)|$, l'espace $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ devient un espace de Banach. Définissons:

$$\left(T(t)f\right)(\alpha)=f(t+\alpha)\quad ,\quad \forall t\geq 0 \text{ et } \alpha\in[0,\infty).$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a:
i) $\left(T(0)f\right)(\alpha)=f(0+\alpha)=f(\alpha)$. Donc $T(0)=I$;
ii) $\left(T(t+s)f\right)(\alpha)=f(t+s+\alpha)=\left(T(t)f\right)(s+\alpha)=\left(T(t)T(s)f\right)(\alpha)$, $\forall f\in\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$. Donc $T(t+s)=T(t)T(s)$, $\forall t,s\geq 0$;
iii) $\lim_{t\searrow 0}\|T(t)f-f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}=\lim_{t\searrow 0}\left\{\sup_{\alpha\in[0,\infty)}|f(t+\alpha)-f(\alpha)|\right\}=0, \forall f\in\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$.
De même, nous avons:

$$\begin{aligned}\|T(t)f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}&=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\left|\left(T(t)f\right)(\alpha)\right|=\sup_{\alpha\in[0,\infty)}|f(t+\alpha)|=\\ &=\sup_{\beta\in[t,\infty)}|f(\beta)|\leq\sup_{\beta\in[0,\infty)}|f(\beta)|=\|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}\quad ,\quad \forall t\geq 0.\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\|=1$, quelque soit $t\geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, nommé le C_0-semi-groupe de translation à droite.
Soit $A:\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)\longrightarrow\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f\in\mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$Af(\alpha)=\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)f(\alpha)-f(\alpha)}{t}=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t}=f'(\alpha)\quad ,$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent:

$$\mathcal{D}(A) \subset \{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \} \quad .$$

Si $f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ tel que $f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, alors:

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \quad .$$

Mais:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| = \\ = \quad & \left| \frac{1}{t} f(\tau)|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)]\, d\tau \right| \leq \\ \leq \quad & \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| \; d\tau \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \searrow 0$. Par suite:

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0,$$

d'où $f \in \mathcal{D}(A)$ et:

$$\{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \} \subset \mathcal{D}(A) \quad .$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \}$ et $Af = f'$. Comme cet opérateur est non borné, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

Nous noterons par $\mathcal{SG}(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0 \, .$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe *exponentiellement borné.*

Proposition 2.1.4 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité:*

$$T(t)Ax = AT(t)x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons:

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \quad . \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$.■

Remarque 2.1.5 On voit que:

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.1.6 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors l'application:*

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et nous avons:

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| \leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \leq \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax \quad ,$$

d'où:

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Si $t-h>0$, alors nous avons:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\|\leq\\&\leq\|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax+Ax-T(h)Ax\right\|\leq\\&\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|+\|T(h)Ax-Ax\|\right)\quad.\end{aligned}$$

Par suite:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax$$

et:

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x=T(t)Ax\quad,\quad\forall t\geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,\infty)$, quel que soit $x\in\mathcal{D}(A)$. De plus, on a l'égalité:

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x\quad,\quad\forall t\geq 0.\blacksquare$$

Lemme 2.1.7 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe. Alors:*

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,ds=T(t)x$$

quels que soient $x\in\mathcal{E}$ *et* $t\geq 0$.

Preuve. L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,ds-T(t)x\right\|=\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(T(s)-T(t)\right)x\,ds\right\|\leq\\\leq&\sup_{s\in[t,t+h]}\|T(s)x-T(t)x\|\end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0,\infty)\ni t\longmapsto T(t)x\in\mathcal{E}$.$\blacksquare$

Proposition 2.1.8 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{E}$, alors $\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité:*

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$. Alors:

$$\begin{aligned}
&\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\,du = \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du \quad .
\end{aligned}$$

Par pasage à limite pour $h \searrow 0$ et compte tenu du lemme 2.1.7, nous obtenons:

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \quad , \quad \forall t \geq 0$$

et:

$$\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A).\blacksquare$$

Théorème 2.1.9 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ Si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, alors nous avons:

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y \quad , \quad \forall s \in [0,t]\,,\ t \geq 0,$$

d'où:

$$\int_0^t T(s)y\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x\,ds = T(t)x - x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in \mathcal{E}$ tel que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Alors nous avons

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

d'où

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds = T(0)y = y \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

compte tenu du lemme 2.1.7. Finalement on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.■

Théorème 2.1.10 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*
i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) A *est un opérateur fermé.*

Preuve. i) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_n > 0$, $n \in I\!N$, tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors:

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A) \quad , \quad \forall n \in I\!N,$$

d'où:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,ds = T(0)x = x \quad .$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.
ii) Soit $(x_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors:

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \, \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \, \|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0,t]$. Par suite $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$.
D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds \quad ,$$

d'où:

$$\lim_{n\to\infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n \, ds \quad ,$$

ou bien:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds \quad .$$

Finalement, on voit que:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = y \quad .$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé.■

Nous montrons maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0-semi-groupes.

Théorème 2.1.11 (l'unicité de l'engendrement) *Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors:*

$$T(t) = S(t) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Définissons l'application:

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, d'où:

$$T(t)x = S(t)x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que:

$$T(t)x = S(t)x \quad , \quad \forall t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{E} \quad ,$$

ou bien:

$$T(t) = S(t) \quad , \quad \forall t \geq 0.\blacksquare$$

2.2 La transformée de Laplace d'un C_0-semi-groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} | Re\lambda > \omega\}$. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Nous avons:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

et on voit que:

$$\left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| \leq e^{-Re\lambda t}\,\|T(t)\|\,\|x\| \leq Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\| \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Définissons l'application:

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$

par:

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad .$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus, on a:

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \left\| e^{-\lambda t} T(t)x \right\| dt \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \|x\| \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.2.1 *L'opérateur:*

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \, dt$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.

Soit $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert. Une application analytique:

$$\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

qui vérifie la propriété:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \quad , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{D},$$

s'appelle une *pseudo-résolvante*.

Le théorème suivant a été prouvé par Arendt [**Ar'87**].

Théorème 2.2.2 *Soit* $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une application fortement continue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Alors l'application

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt$$

est une pseudo-résolvante si et seulement si on a

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad \forall t, s \geq 0.$$

Preuve. Soient $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$, tel que $\lambda \neq \mu$. Alors nous avons:

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} R(\lambda) - \frac{1}{\mu - \lambda} R(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} R(\lambda)\, d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} R(\mu)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} \int_0^\infty e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} \int_0^\infty e^{-\mu r} T(r)\, dr\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\mu r} T(r)\, dr\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)} e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau - \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}\, d\tau e^{-\lambda r} T(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)\, dr\, d\tau - \int_0^\infty \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\nu)}\, d\nu e^{-\lambda r} T(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}\, d\tau + \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\, d\tau - \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu}\, d\nu \right) e^{-\lambda r} T(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}\, ds\, e^{-\lambda r} T(r)\, dr = \int_0^\infty \int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s} e^{-\lambda r} T(r)\, dsdr =$$

$$= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s} e^{-\lambda r} T(r)\, drds = \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s} \int_s^\infty e^{-\lambda r} T(r)\, drds =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)} T(r)\, drds = \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+s)\, dtds =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} T(t+s)\, dtds \quad .$$

D'autre part, il est clair que

$$R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} T(t)T(s)\, dtds$$

et par conséquent:

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda} - R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} [T(t+s) - T(t)T(s)]\, dtds$$

d'où on déduit facilement les affirmations de l'énoncé.■

Théorème 2.2.3 *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé à domaine dense et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in I\!R$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes:

i) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A;

ii) $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{E}$ on a $R(\lambda)x = R(\lambda; A)x$.

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{E}$, nous avons:

$$\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt =$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt =$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt =$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \quad .$$

Par passage à limite, on obtient:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} = \lambda R(\lambda)x - x \quad .$$

Il en résulte que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

ou bien

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous obtenons:

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)x\,dt = \\ &= \left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = x + \lambda R(\lambda)x \quad , \end{aligned}$$

d'où:

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda)x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.
ii)$\Longrightarrow$i) Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $R(\lambda; A) = R(\lambda)$. Compte tenu du théorème 2.2.2 il en résulte:

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad \forall t, s \geq 0.$$

De plus, si $T(0)x = 0$, alors $T(t)x = T(t)T(0)x = T(t)0 = 0$, pour tout $t > 0$. Par conséquent $R(\lambda)x = 0$, d'où il résulte $x = 0$ et, par suite, $T(0) = I$. Il en découle $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe.
Soit maintenant B le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors, en appliquant la première partie de la preuve, on a:

$$R(\lambda; B) = R(\lambda) = R(\lambda; A)$$

d'où il s'ensuit que $B = A$.■

Remarque 2.2.4 On voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a:

$$\mathcal{I}m\ R(\lambda; A) = \mathcal{I}m\ R(\lambda) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et:

$$R(\lambda; A)\mathcal{D}(A) = R(\lambda)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \quad .$$

Remarque 2.2.5 Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors nous avons:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} | Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

et:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | Re\lambda \leq \omega\}.$$

Théorème 2.2.6 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a:*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu du théorème 2.2.3, si $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons $\lambda \in \rho(A)$ et:

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

De plus:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \quad .$$

Il est clair que:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)x = -\int_0^\infty te^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}$$

et par récurrence on peut montrer que:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'autre part, nous avons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par suite, on a:

$$(-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

d'où il résulte que:

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus:

$$\|R(\lambda;A)^n x\| \leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\,dt =$$

$$= \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\frac{n-1}{Re\lambda-\omega}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\,dt = \cdots = \frac{M\|x\|}{(Re\lambda-\omega)^n}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $n \in I\!N^*$. Par conséquent:

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*. \blacksquare$$

2.3 L'approximation généralisée de Yosida

Dans cette section nous avons utilisé les idées de Pazy [**Pa'83-1**, pag. 9] pour obtenir une petite extension de l'approximation de Yosida .

Lemme 2.3.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*
i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a:

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda;A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

De plus $\lambda AR(\lambda;A) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda;A)x = Ax \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$. Alors $R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x$. Si $Re\lambda \to \infty$, nous avons:

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \|R(\lambda; A)\| \, \|Ax\| \leq \\ &\leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax\| \longrightarrow 0 \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte que:

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Soit $x \in \mathcal{E}$, puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Nous avons:

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq$$

$$\leq \|\lambda R(\lambda; A)x - \lambda R(\lambda; A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq$$

$$\leq \|\lambda R(\lambda; A)\| \, \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq$$

$$\leq \frac{|\lambda| M}{Re\lambda - \omega}\|x - x_n\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax_n\| + \|x_n - x\| =$$

$$= \frac{|\lambda| M + Re\lambda - \omega}{Re\lambda - \omega} \, \|x_n - x\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega} \, \|Ax_n\| \quad .$$

Mais $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\|x_{n_\varepsilon} - x\| < \varepsilon \, \frac{Re\lambda - \omega}{|\lambda| M + Re\lambda - \omega} \quad .$$

Par conséquent:

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon + \frac{M}{Re\lambda - \omega} \, \|Ax_{n_\varepsilon}\| \quad ,$$

d'où:

$$\limsup_{Re\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

ou bien:

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

De plus:

$$\lambda AR(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda I - (\lambda I - A)\right] R(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda R(\lambda; A) - I\right] = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

Par suite, on a:

$$\|\lambda AR(\lambda;A)x\| = \|\lambda\,[\lambda R(\lambda;A)-I]\,x\| \leq$$

$$\leq |\lambda|\,\|\lambda R(\lambda;A)x - x\| \leq |\lambda|\,(\|\lambda R(\lambda;A)x\| + \|x\|) \leq$$

$$\leq |\lambda| \left(\frac{|\lambda| M}{Re\lambda-\omega}+1\right)\|x\| \quad , \quad \forall x\in\mathcal{E}$$

et on voit que $\lambda AR(\lambda;A)\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$.
Si $x\in\mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$\lambda R(\lambda;A)Ax = \left[\lambda^2 R(\lambda;A)-\lambda I\right]x = \lambda AR(\lambda;A)x \quad ,$$

d'où il résulte que:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty}\lambda AR(\lambda;A)x = \lim_{Re\to\infty}\lambda R(\lambda;A)Ax = Ax \quad , \quad \forall x\in\mathcal{D}(A).\blacksquare$$

Remarque 2.3.2 On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda;A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A.
C'est le motif pour lequel on introduit la définition suivante.

Définition 2.3.3 *La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}\subset\mathcal{B}(\mathcal{E})$, où $A_\lambda=\lambda AR(\lambda;A)$, s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.*

Théorème 2.3.4 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tout $\mu\in\Lambda_\omega$, il existe $\Omega>\omega$ tel que $\Lambda_\Omega\subset\rho(A_\mu)$ et pour tout $\lambda\in\Lambda_\Omega$ on a:*

$$\|R(\lambda;A_\mu)\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\Omega} \quad .$$

De plus, pour $\varepsilon>0$, il existe une constante $C>0$ (qui dépend de M et ε) tel que:

$$\|R(\lambda;A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}\,(\|x\|+\|Ax\|) \quad , \quad \forall x\in\mathcal{D}(A),$$

quels que soient $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, avec $Re\lambda>\Omega+\varepsilon$ et $Re\mu>\omega+\frac{|\mu|}{2}$.

Preuve. Soit $\mu \in \Lambda_\omega$ arbitrairement fixé. Nous avons vu que A_μ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\mu}\right\}_{t\geq 0}$. En ce cas, nous avons:

$$\left\|e^{tA_\mu}\right\| = \left\|e^{t\left(\mu^2 R(\mu;A)-\mu I\right)}\right\| = \left\|e^{-\mu t I} e^{\mu^2 t R(\mu;A)}\right\| \leq$$

$$\leq e^{-Re\mu t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mu^{2k}R(\mu;A)^k}{k!}\right\| \leq e^{-Re\mu t}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{t^k|\mu|^{2k}\left\|R(\mu;A)^k\right\|}{k!} \leq$$

$$\leq e^{-Re\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\mu|^{2k}M}{k!(Re\mu-\omega)^k} = Me^{-Re\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t|\mu|^2}{Re\mu-\omega}\right)^k}{k!} =$$

$$= Me^{-Re\mu t}e^{\frac{t|\mu|^2}{Re\mu-\omega}} = Me^{\frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu-\omega}t} \quad .$$

Si nous notons:

$$\Omega = \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu-\omega} \quad ,$$

alors il est clair que:

$$\Omega = \omega + \frac{\omega^2 + Im^2\mu}{Re\mu-\omega} > \omega$$

et que $\Lambda_\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda > \Omega\} \subset \rho(A_\mu)$. De plus, pour tout $\lambda \in \Lambda_\Omega$, nous avons:

$$\|R(\lambda;A_\mu)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \Omega} \quad .$$

Si nous considérons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \Omega + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, alors on voit que:

$$\|R(\lambda;A_\mu)\| \leq \frac{M}{\varepsilon} \quad .$$

D'autre part, pour $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\mu > \omega + \frac{|\mu|}{2}$, nous obtenons:

$$\|A_\mu x\| = \|\mu R(\mu;A)Ax\| \leq |\mu|\|R(\mu;A)\|\|Ax\| \leq$$
$$\leq \quad |\mu|\frac{M}{Re\mu-\omega}\|Ax\| \leq 2M\|Ax\| \quad .$$

De l'égalité:

$$(\lambda I - A_\mu)R(\lambda;A_\mu) = I \quad ,$$

il vient:

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} R(\lambda; A_\mu) A_\mu$$

et par conséquent:

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\|x\| + \|R(\lambda; A_\mu)\| \|A_\mu x\|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\|x\| + \frac{2M^2}{\varepsilon} \|Ax\|\right) \leq$$

$$\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\|x\| + \|Ax\|\right) \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

où la constante C ne dépend que de M et de ε.■

Théorème 2.3.5 *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe, A son générateur infinitésimal, $\{A_\mu\}_{\mu \in \Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega + \varepsilon$, arbitrairement fixé pour $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \in \rho(A_\mu)$, $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et*

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda + \mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}; A\right) \quad .$$

Preuve. Compte tenu du théorème 2.3.4, pour $\mu \in \Lambda_\omega$, il existe $\Omega > \omega$ tel que $\Lambda_\Omega \subset \rho(A_\mu)$. Nous avons:

$$\Omega = \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} \quad .$$

Donc l'inégalité $Re\lambda > \Omega$ est équivalente avec:

$$Re\lambda > \omega + \frac{\omega^2 + Im\mu}{Re\mu - \omega} \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\frac{\omega^2 + Im\mu}{Re\mu - \omega} < \varepsilon$, alors $Re\lambda > \omega + \varepsilon$ implique $Re\lambda > \Omega$. Par suite, $\lambda \in \rho(A_\mu)$. Donc il existe $R(\lambda; A_\mu)$ et avec le théorème 2.3.4 on voit que:

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \quad .$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned} Re\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} &= Re\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\right) = Re\lambda - Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} > \\ &> \omega+\varepsilon - Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} \quad . \end{aligned}$$

Etant donné $k > 0$ tel que $|Im\lambda| \leq k$, il existe $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} < \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que $Re\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} > \omega + \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et donc $R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)$ existe bien. Nous avons:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda I - A_\mu)(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda I - \mu^2 R(\mu; A) + \mu I\right](\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\ &= \left(\mu I - A - \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}I\right) R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\ &= \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}I - A\right) R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = I \quad . \end{aligned}$$

Par un calcul analogue, on peut obtenir:

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)(\lambda I - A_\mu) = I \quad .$$

Il s'ensuit que:

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \quad .$$

De plus, compte tenu de l'identité de la résolvante, il en résulte que:

$$R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) - R(\mu; A) = \left(\mu - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right) R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) R(\mu; A) \quad .$$

En utilisant la commutativité de la résolvante, on obtient:

$$R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = R(\mu; A) + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}R(\mu; A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)$$

d'où il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \frac{1}{\lambda+\mu}I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \quad .\blacksquare$$

Remarque 2.3.6 Evidemment, pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on voit que A_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$. Nous utiliserons cette famille pour montrer l'existence d'un C_0-semi-groupe engendré par A.

2.4 Le théorème de Hille-Yosida

Dans cette section nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0. Il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes. Il a été montré pour la première fois indépendamment par HILLE dans [**Hi'48**] et par YOSIDA dans [**Yo'48**] pour les C_0-semi-groupes de contractions. Quelques années plus tard, FELLER dans [**Fe'53-2**], MIYADERA dans [**Mi'52**] et PHILLIPS dans [**Ph'52**] donnent une preuve pour le cas général d'un C_0-semi-groupe. Nous avons obtenu une preuve en utilisant l'approximation généralisée de Yosida que nous avons introduit dans la définition 2.3.3.

Dans la suite, pour tout $r > 1$, nous notons par $\Lambda_{\omega,r}$ l'ensemble $\left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, Re\,\lambda > \frac{r}{r-1}\omega\right\}$.

Lemme 2.4.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*

i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;

ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a:

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A, alors pour tout $r > 1$ et tous $\alpha, \beta \in \Lambda_{\omega,r}$ nous avons:

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq M^2 te^{\omega rt} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } t \geq 0.$$

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$, $v \in [0,1]$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors:

$$\frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right) = tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x \quad .$$

On peut facilement vérifier que A_α, A_β, e^{vtA_α} et $e^{(1-v)tA_\beta}$ commutent quels que soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Nous obtenons:

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right)\, dv =$$

$$= \int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha}A_\alpha e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x\right)\, dv \quad ,$$

d'où:

$$e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}A_\alpha x - te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}A_\beta x\right)\, dv \quad ,$$

ou bien:

$$e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x = t\int_0^1 e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}\left(A_\alpha x - A_\beta x\right)\, dv$$

quels que soient $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{E}$. Nous en déduisons que:

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq t\int_0^1 \left\|e^{vtA_\alpha}\right\|\left\|e^{(1-v)tA_\beta}\right\|\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\|\, dv \quad .$$

D'autre part, nous avons:

$$\left\|e^{tA_\alpha}\right\| = \left\|e^{t\left(\alpha^2 R(\alpha;A)-\alpha I\right)}\right\| = \left\|e^{-\alpha t I}e^{\alpha^2 tR(\alpha;A)}\right\| \leq$$

$$\leq e^{-Re\alpha t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\alpha^{2k}R(\alpha;A)^k}{k!}\right\| \leq e^{-Re\alpha t}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}\left\|R(\alpha;A)^k\right\|}{k!} \leq$$

$$\leq e^{-Re\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}M}{k!(Re\alpha-\omega)^k} = Me^{-Re\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t|\alpha|^2}{Re\alpha-\omega}\right)^k}{k!} =$$

$$= Me^{-Re\alpha t}e^{\frac{t|\alpha|^2}{Re\alpha-\omega}} = Me^{\frac{\omega Re\alpha+Im^2\alpha}{Re\alpha-\omega}t} \quad ,$$

quel que soient $\alpha \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Soit $r > 1$ tel que:

$$\frac{\omega Re\alpha + Im^2\alpha}{Re\alpha - \omega} < \omega r \quad .$$

Alors, nous avons:

$$\omega Re\alpha + Im^2\alpha < \omega r Re\alpha - \omega^2 r \quad ,$$

d'où:

$$\omega Re\alpha < \omega r Re\alpha - \omega^2 r \quad ,$$

ou bien:

$$\omega^2 r < \omega(r-1)Re\alpha \quad .$$

Il en découle:

$$Re\alpha > \frac{r}{r-1}\omega \quad .$$

Par conséquent, pour tout $r > 1$ et tout $\alpha \in \Lambda_{\omega,r}$, on obtient:

$$\left\|e^{tA_\alpha}\right\| \leq Me^{r\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| &\leq t\int_0^1 Me^{\omega rvt}Me^{\omega r(1-v)t}\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\| dv = \\ &= M^2te^{\omega rt}\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\|\end{aligned}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$.■

Maintenant nous présentons le célèbre théorème de Hille - Yosida pour les semi-groupes de classe $\mathcal{SG}(M,\omega)$.

Théorème 2.4.2 (Hille - Yosida) *Un opérateur linéaire:*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ si et seulement si:
i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a:

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ On obtient cette implication en tenant compte du théorème 2.1.10 et du théorème 2.2.6.
$\Longleftarrow$ Supposons que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ possède les propriétés (i) et (ii). Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$, l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Compte tenu du lemme 2.3.1, il résulte que $A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0} = \left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe uniformément continu engendré par A_λ. Soit $r > 1$. Avec le lemme 2.4.1, on a:

$$\|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 t e^{\omega r t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda_{\omega,r},\ x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Soient $[\mathcal{D}(A)]$ l'espace de Banach $\mathcal{D}(A)$ avec la norme $\|\,.\,\|_{\mathcal{D}(A)}$, et $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)], \mathcal{E})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur $[\mathcal{D}(A)]$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, doté de la topologie forte. Notons par $\mathcal{C}\left([0,\infty); \mathcal{B}([\mathcal{D}(A)], \mathcal{E})\right)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)], \mathcal{E})$ doté de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Si $[a,b] \subset [0,\infty)$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ nous avons:

$$\sup_{t\in[a,b]} \|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 b e^{\omega r b} \left(\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|\right) \longrightarrow 0$$

si $r \searrow 1$, donc si $Re\alpha, Re\beta \to \infty$, d'où il résulte que $\left(\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}\right)_{\lambda\in\Lambda_{\omega,r}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}\left([0,\infty); \mathcal{B}([\mathcal{D}(A)], \mathcal{E})\right)$. Donc, il existe un unique $T_0 \in \mathcal{C}\left([0,\infty); \mathcal{B}(\mathcal{D}(A), \mathcal{E})\right)$ tel que $T_\lambda(t)x \longrightarrow T_0(t)x$, si $Re\lambda \to \infty$, quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Puisque:

$$\|T_\lambda(t)\| \leq M e^{\omega r t} \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

on obtient:

$$\|T_0(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\| \quad , \quad \forall t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{D}(A).$$

Considérons l'application linéaire:

$$\Theta_0 : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{C}\left([a,b];\mathcal{E}\right)$$

$$\Theta_0 x = T_0(\,.\,)x$$

quel que soit $[a,b] \subset [0,\infty)$. Comme nous avons:

$$\|\Theta_0 x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})} = \sup_{t\in[a,b]} \|T_0(t)x\| \leq Me^{\omega b}\|x\| \leq Me^{\omega b}\|x\|_{\mathcal{D}(A)} \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

on voit que Θ_0 est une application continue et puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue:

$$\Theta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}\left([a,b];\mathcal{E}\right)$$

telle que:

$$\Theta|_{\mathcal{D}(A)} = \Theta_0$$

et:

$$\|\Theta x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})} \leq Me^{\omega b}\|x\|$$

quel que soit $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent, il existe un seul opérateur $T \in \mathcal{C}\left([a,b];\mathcal{B}(\mathcal{E})\right)$ tel que:

$$\Theta x = T(\,.\,)x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

On peut répéter ce procédé pour tous les intervalles compacts de $[0,\infty)$ et on voit qu'il existe un seul opérateur, noté aussi par $T \in \mathcal{C}\left([0,\infty);\mathcal{B}(\mathcal{E})\right)$, tel que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on ait:

$$T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x \quad \text{si} \quad Re\lambda \to \infty,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. De plus:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Il est évident que:

$$T(0)x = \lim_{Re\lambda\to\infty} T_\lambda(0)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}$$

et:

$$\lim_{t\searrow 0} T(t)x = \lim_{t\searrow 0}\left(\lim_{Re\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x\right) = \lim_{Re\lambda\to\infty}\left(\lim_{t\searrow 0} T_\lambda(t)x\right) = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Soient $t, s \in [0,\infty)$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors, nous avons:

$$\begin{aligned} \|T(t+s)x - T(t)T(s)x\| &\le \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \\ &+ \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \le \\ &\le \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\|\,\|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \\ &+ \|T_\lambda(t)\,(T(s)x) - T(t)\,(T(s)x)\| \quad . \end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t) \longrightarrow T(t)$, si $Re\lambda \to \infty$, pour la topologie forte de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, il s'ensuit que $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Par conséquent $\{T(t)\}_{t\ge 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a:

$$\begin{aligned} &\|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| \le \\ \le\ &\|T_\lambda(s)\|\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \le \\ \le\ &Me^{\omega rt}\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

si $Re\lambda \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$, d'où:

$$T(t)x - x = \lim_{Re\lambda\to\infty} [T_\lambda(t)x - x] = \lim_{Re\lambda\to\infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x\, ds = \int_0^t T(t)Ax\, ds$$

quels que soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \ge 0$.

Soit B le générateur infinitésimal du C_0-semigroupe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\, ds = Ax$$

et nous voyons que $x \in \mathcal{D}(B)$. Par conséquent $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$.
D'autre part, nous avons l'inégalité:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Soit $x \in \mathcal{D}(B)$, on a donc $(\lambda I - B)\,x \in \mathcal{E}$ et comme l'opérateur $\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E}$ est bijectif, il existe $x' \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(\lambda I - A)\,x' = (\lambda I - B)\,x$. Puisque $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$, il vient que $(\lambda I - B)\,x' = (\lambda I - B)\,x$ et comme $\lambda \in \rho(B)$, il en résulte que $x' = x$. Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et donc $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$. Finalement on voit que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $A = B$.
Nous avons montré donc que A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et compte tenu du théorème de l'unicité de l'engendrement, il résulte que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'unique C_0-semi-groupe engendré par A.■

Corollaire 2.4.3 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors:*

$$T(t)x = \lim_{Re\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.

Preuve. Elle résulte du théorème de Hille-Yosida.■

Il existe des semi-groupes qui ne sont pas C_0-semi-groupes, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant [**Vr'01**, Problema 2.3].

Exemple 2.4.4 Soit:

$$\mathcal{C}_{cb}(I\!R) = \{\, f : I\!R \to I\!R |\, f \text{ est continue et bornée}\} \quad .$$

Avec la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{cb}(I\!R)} = \sup_{\alpha \in I\!R} |f(\alpha)|$$

l'espace $\mathcal{C}_{cb}(I\!R)$ devient un espace de Banach. Soit $t \geq 0$ et

$$S(t) : \mathcal{C}_{cb}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{C}_{cb}(I\!R)$$

$$(S(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{C}_{cb}(I\!R) \text{ et } \alpha \in I\!R.$$

Compte tenu de l'exemple 2.1.3, on voit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}_{cb}(I\!R)$. Mais l'égalité

$$\lim_{t\searrow 0} S(t)f = f \quad , \quad \forall f \in \mathcal{C}_{cb}(I\!R)$$

est vraie si et seulemant si f est une fonction uniformément continue sur $I\!R$. Comme dans l'espace $\mathcal{C}_{cb}(I\!R)$ on peut trouver des fonctions qui ne sont pas uniformément continue, par exemple $f(\alpha) = \sin \alpha^2$, il s'ensuit que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas de classe C_0.
De plus, on peut voir que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}_{cb}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{C}_{cb}(I\!R)$$

$$Af = f'$$

où

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f : I\!R \to I\!R \,\middle|\, f \textit{ est uniformément derivable à droite sur } \boldsymbol{R} \textit{ et } f^{'} \in \mathcal{C}_{ub}(I\!R) \right\}.$$

Comme

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{C}_{ub}(I\!R) \subset \mathcal{C}_{cb}(I\!R) \quad ,$$

il s'ensuit que A n'est pas un opérateur densément défini.

Dans le cas d'un générateur infinitésimal A qui n'est plus un opérateur à domaine dense, on a le théorème suivant.

Théorème 2.4.5 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longleftarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega > 0$ tel que $\Lambda_\omega \in \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

Alors la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Preuve. La partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est l'opérateur linéaire $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) = \left\{x \in \mathcal{D}(A) \,\middle|\, Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)}\right\}$$

par

$$A_{\overline{\mathcal{D}(A)}} = A\Big/_{\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)} \quad .$$

Il est clair que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$ on a

$$\lambda x - A_{\overline{\mathcal{D}(A)}} x = \lambda x - Ax \quad .$$

Par suite $\Lambda_\omega \in \rho\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$. Donc la résolvante de la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$

$$R\left(\,.\,; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) : \rho\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) \longrightarrow \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)\right)$$

vérifie

$$R\left(\lambda; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) = R(\lambda; A)\Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}} \quad .$$

Alors, pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ il résulte que

$$\left\| R\left(\lambda; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)^n x \right\| = \|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \|x\| \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a:

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)} \|Ax\|$$

d'où il s'ensuit que

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

De même, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ il résulte $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$A(\lambda R(\lambda; A)x) = \lambda A R(\lambda; A)x = \lambda[\lambda I - (\lambda I - A)]R(\lambda; A)x =$$

$$= \lambda[\lambda R(\lambda; A)x - x] = \lambda[\lambda R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)(\lambda I - A)x] =$$

$$= \lambda R(\lambda; A)[\lambda x - \lambda x + Ax] = \lambda R(\lambda; A)Ax \quad ,$$

quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Par conséquent, $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A)$ et $A(\lambda R(\lambda; A)x) \in \mathcal{D}(A) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Il s'ensuit donc que $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$.

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t_n \in \left(0, \frac{1}{\omega}\right)$, $n \in I\!N$, tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors

$$x_n = \frac{1}{t_n} R\left(\frac{1}{t_n}; A\right) x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) \quad , \quad \forall n \in I\!N$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} R\left(\frac{1}{t_n}; A\right) x = x \quad .$$

Il en résulte que $\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$ est dense dans $\mathcal{D}(A)$, donc dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Avec le théorème de Hille-Yosida il s'ensuit que $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors la famille $\left\{A_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}}\right\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)\right)$ donnée par

$$A_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}} = A_\lambda \Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$$

est l'approximation de Yosida de l'opérateur $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$. Compte tenu du corollaire 2.4.3 il en résulte que pour le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ engendré par la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ on a:

$$T(t)x = \lim_{Re\lambda\to\infty} e^{tA_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}}} x \quad , \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}(A)},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.$\blacksquare$

Chapitre 3

Semi-groupes intégrés

3.1 Propriétés élémentaires

Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Soit

$$S(t) = \int_0^t T(s)\,ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Alors la transformée de Laplace de S satisfait les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)\,dsdt = \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt = \frac{1}{\lambda} R(\lambda; A) \quad .\end{aligned}$$

Le théorème 2.2.2 conduit à la question suivante: on peut trouver une équation fonctionelle vérifiée par S telle que l'application

$$\Lambda_\omega \ni \lambda \longmapsto \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt$$

est une pseudo-résolvante? On a le théorème suivant (voir [**Ar'87**], [**Hi'91-1**], [**MPV'97**]):

Théorème 3.1.1 *Soit* $S : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une application fortement continue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in I\!R$ *tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes:
i) l'application $R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

est une pseudo-résolvante;
ii) pour tous $t, s \geq 0$ *on a*

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)\, dr - \int_0^s S(r)\, dr \quad .$$

Preuve. Soit $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \neq \mu$. Compte tenu de l'identité de la résolvante, on a

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \frac{R(\lambda)}{\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} \quad .$$

Pour la partie de droite de l'égalité on obtient

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} S(t)S(s)\, dsdt \quad .$$

Pour obtenir l'égalité de l'énoncé il est suffisant de montrer que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \\ = &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} \left[\int_t^{t+s} S(r)\, dr - \int_0^s S(r)\, dr \right] dsdt. \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \\ = &\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right] + \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{R(\mu)}{\mu} \quad . \end{aligned}$$

Nous avons successivement:

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda}-\frac{R(\mu)}{\mu}\right]=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda}-\frac{R(\mu)}{\mu}\right]=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\frac{R(\lambda)}{\lambda}d\tau-\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\frac{R(\mu)}{\mu}d\tau=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\mu r}S(r)drd\tau=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\mu r}S(r)drd\tau=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}d\tau e^{-\lambda r}S(r)dr=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau e^{-\lambda r}S(r)dr-\int_0^\infty\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu}d\nu e^{-\lambda r}S(r)dr=$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau+\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau-\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu}d\nu\right]e^{-\lambda r}S(r)dr=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}dse^{-\lambda r}S(r)dr=\int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}S(r)dsdr=$$

$$=\int_0^\infty\int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}S(r)drds=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}\int_s^\infty e^{-\lambda r}S(r)drds=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)}S(r)drds=\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+s)dtds=$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} S(t+s)\,ds\,dt \quad .$$

D'autre part, compte tenu de l'égalité

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty e^{-\mu v} dv$$

on obtient

$$\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right] = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu\tau} S(t+\tau)\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu\tau} S(t+\tau)\int_0^\infty e^{-\mu v}\,dv\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty S(t+\tau)\int_0^\infty e^{-\mu(\tau+v)}\,dv\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty S(t+\tau)\int_\tau^\infty e^{-\mu s}\,ds\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(t+\tau)\,d\tau\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{t+s} S(r)\,dr\,ds\,dt \quad .$$

De plus

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{R(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{\mu\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{\mu} S(r)\,dr = -\frac{1}{\mu\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu r} S(r)\,dr =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu r} S(r)\int_0^\infty e^{-\mu v}\,dv\,dr = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty S(r)\int_0^\infty e^{-\mu(v+r)}\,dv\,dr =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty S(r)\int_r^\infty e^{-\mu s}dsdr = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(r)dsdr =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(r)dsdrdt \quad .$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda)-R(\mu)] =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}\left[\int_t^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr\right]\,dsdt.$$

On en déduit facilement l'équivalence des affirmations de l'énoncé. ■

Remarque 3.1.2 Pour tous $t, s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
S(t)S(s) &= \int_t^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr = \\
&= \int_0^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr = \\
&= \int_s^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr = \int_0^t S(\tau+s)\,d\tau - \int_0^t S(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_0^t [S(\tau+s) - S(\tau)]\,d\tau \quad .
\end{aligned}$$

De plus

$$S(t)S(s) = S(s)S(t) \quad , \quad \forall t, s \geq 0$$

et

$$S(t)S(0) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 3.1.3 *On appelle semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}$ une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*

i) S(0)=0;

ii) l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *est fortement continue;*

iii) pour tous $t, s \geq 0$ *on a*

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(\tau+s) - S(\tau)]\, d\tau \quad .$$

Remarque 3.1.4 Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré. Pour tout $n \in I\!N$, nous désignerons par $\mathcal{C}^n$ l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{E} \mid S(.)x \in \mathcal{C}^n([0,\infty);\mathcal{E})\}$$

avec la convention $\mathcal{C}^0 = \mathcal{E}$.
Alors la propriété (iii) de la définition 3.1.3 peut-être remplacée par

$$S(t)x \in \mathcal{C}^1$$

et

$$S'(r)S(t)x = S(r+t)x - S(r)x \quad , \quad \forall r, t \geq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$.
De plus, nous avons

$$S(t) : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1} \quad , \quad \forall n \in I\!N \text{ et } t \geq 0$$

et

$$S'(t) : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^n \quad , \quad \forall n \in I\!N^* \text{ et } t \geq 0.$$

Proposition 3.1.5 *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe intégré. Alors:*
i) pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ *on a*

$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x \quad , \quad \forall r, t \geq 0;$$

ii) pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ *on a*

$$S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x \quad , \quad \forall t \geq 0;$$

iii) pour tout $x \in \mathcal{C}^2$ *on a*

$$S''(0)S(t)x = S(t)S''(0)x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. i) Soit $x \in \mathcal{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S(r)S'(t)x &= \frac{d}{dt}[S(r)S(t)]x = \frac{d}{dt}[S(t)S(r)]x = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t [S(\tau + r) - S(\tau)]d\tau\right] x = S(t+r)x - S(t)x \quad . \end{aligned}$$

ii) Soit $x \in \mathcal{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S''(r)S(t)x &= \frac{d}{dt}\,[S'(r)S(t)x] = \\ &= \frac{d}{dt}[S(r+t)x - S(r)x] = S'(r+t)x - S'(r)x \quad . \end{aligned}$$

Pour $r = 0$, il en résulte:

$$S''(0)S(t)x = S'(t)x - S'(0)x \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

d'où on obtient (ii).
iii) Soit $x \in \mathcal{C}^2$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S(r)S''(t)x &= \frac{d}{dt}\,[S(r)S'(t)]\,x = \frac{d}{dt}[S(r+t)x - S(t)x] = \\ &= S'(r+t)x - S'(t)x \quad . \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, il vient

$$S(r)S''(0)x = S'(r)x - S'(0)x \quad , \quad \forall r \geq 0.$$

Compte tenu de l'égalité (ii), il s'ensuit (iii).■

Exemple 3.1.6 Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0. Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}$.

Exemple 3.1.7 Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E}^*)$

$$S(t) = \int_0^t T^*(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}^*$. En général, ce semi-groupe n'est pas de classe C_0.

Définition 3.1.8 *On appelle espace dégénéré du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ l'ensemble*

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{E} \mid S(t)x = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0\}$$

Remarque 3.1.9 $\mathcal{N}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.1.10 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré et*

$$\mathcal{N}_1 = \left\{ x \in \mathcal{C}^1 \;\middle|\; S'(0)x = 0 \right\} \quad .$$

Alors $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$.

Preuve. Soit $x \in \mathcal{N}$. Alors $S(t)x = 0$, pour tout $T \geq 0$. Par conséquent $S'(t)x = 0$, pour tout $t \geq 0$, d'où il résulte $S'(0)x = 0$. Donc $x \in \mathcal{N}_1$ et, par suite, $\mathcal{N} \in \mathcal{N}_1$.
Soit $x \in \mathcal{N}_1$. Alors $S'(0)x = 0$. De l'égalité

$$S(r)S'(t)x = S(t+r)x - S(t)x \quad , \quad \forall t, r \geq 0$$

on obtient

$$S(r)S'(0)x = S(r)x \quad , \quad \forall r \geq 0.$$

Il en résulte

$$S(r)x = 0 \quad , \quad \forall r \geq 0$$

et on voit que $x \in \mathcal{N}$. Par suite $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$.
Finalement, on voit que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$.■

Définition 3.1.11 *On dit que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si $\mathcal{N} = \{0\}$. En cas contraire, on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré dégénéré.*

Remarque 3.1.12 Le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si pour tout $t \geq 0$, $S(t)x = 0$ implique $x = 0$.

Proposition 3.1.13 *Un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si et seulement si on a $S'(0)x = x$ pout tout $x \in \mathcal{C}^1$.*

Preuve. $\Longrightarrow$ Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors $S(t)x = 0$ pour tout $t \geq 0$, implique $x = 0$.
Soit $x \in \mathcal{C}^1$. Avec la proposition 3.1.5 (i), pour tout $r, t \geq 0$ on voit que

$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x$$

d'où, pour $t = 0$, il s'ensuit

$$S(r)S'(0)x = S(r)x \quad , \quad \forall r \geq 0$$

ou bien

$$S(r)[S'(0)x - x] = 0 \quad , \quad \forall r \geq 0.$$

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré, il en résulte

$$S'(0)x - x = 0$$

donc

$$S'(0)x = x.$$

$\Longleftarrow$ Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré tel que $S(0)x = x$, pour tout $x \in \mathcal{C}^1$. Soit $x \in \mathcal{N}$. Alors $S'(0)x = 0$ et, par conséquent, $x = S'(0)x = 0$, d'où il s'ensuit que $\mathcal{N} = \{0\}$. Il en résulte que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré.$\blacksquare$

Théorème 3.1.14 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{C}^1$.*

Preuve. Pour tout $x \in \mathcal{C}^1$, l'application

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto S'(t)x \in \mathcal{C}^1$$

est continue. Compte tenu de la proposition 3.1.13 on a $S'(0) = I$ et avec la proposition 3.1.5 (i), on voit que

$$S'(r)S'(t)x = S'(r+t) \quad , \quad \forall r, t \geq 0 \quad .$$

Il en résulte que $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{C}^1$.■

3.2 Le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Compte tenu des résultats de la section 2.2, nous avons la tentation de considérer pour générateur du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur linéaire

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

défini par

$$A = \lambda I - R^{-1}(\lambda)$$

où

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \quad .$$

Malheureusement, l'intégrale de la partie de droite de l'égalité n'existe pas en général, comme on peut le voir dans l'exemple suivant [**KH'89**, Example 1.2].

Exemple 3.2.1 On considère $\mathcal{E} = l^2$ et la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{E}$ définie par

$$S(t)(x_n)_{n\in I\!N^*} = \left(\int_0^t e^{a_n s} ds x_n \right)_{n\in I\!N^*}$$

où

$$a_n = n + 2^{n^2}\pi i \quad , \quad n \in I\!N^*.$$

Nous alons montrer que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré.
Pour tout $t \geq 0$ on a

$$\|S(t)(x_n)_{n\in I\!N^*}\|_{l^2}^2 = \left\| \left(\int_0^t e^{a_n s} ds x_n \right)_{n\in I\!N^*} \right\|_{l^2}^2 =$$

$$= \left\| \left(\frac{e^{a_n t} - 1}{a_n} x_n \right)_{n\in I\!N^*} \right\|_{l^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{a_n t} - 1}{a_n} x_n \right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\left(n+2^{n^2}\pi i\right)t} - 1}{n + 2^{n^2}\pi i} \right|^2 |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left| e^{nt+2^{n^2}\pi i t} \right| + 1}{2^{n^2}\pi} \right)^2 |x_n|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{nt} + 1}{2^{n^2}} \right)^2 |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2e^{nt}}{e^{n^2 \ln 2}} \right)^2 |x_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2e^{nt - n^2 \ln 2} \right)^2 |x_n|^2 \quad .$$

Comme l'application

$$\varphi : I\!R \longrightarrow I\!R$$

$$\varphi(x) = -(\ln 2)x^2 + tx$$

à un maximum

$$\varphi_{max} = \frac{t^2}{4 \ln 2} \quad ,$$

il en résulte que

$$\|S(t)(x_n)_{n\in I\!N^*}\|_{l^2}^2 \leq \left(2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 =$$

$$= \left(2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}} \right)^2 \left\| (x_n)_{n\in I\!N^*} \right\|_{l^2}^2$$

d'où

$$\|S(t)\| \leq 2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés.
Evidemment, l'application

$$t \longmapsto S(t)\,(\delta_{in})$$

est continue. Comme l'ensemble $\{\,(\delta_{in})|\ n \in I\!N\}$ est totale dans l^2 et comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément borné par rapport à t sur les intervales compacts de $[0,\infty)$, il en résulte que l'application

$$[0,\infty) \ni t \longrightarrow S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est fortement continue. De plus $S(0) = 0$ et pour tous $t, s \geq 0$ on a:

$$S(t)S(s)\,(x_n)_{n\in I\!N^*} = S(t)\left(\int_0^s e^{a_n\sigma} d\sigma x_n\right)_{n\in I\!N^*} =$$

$$= S(t)\left(\frac{e^{a_n s}-1}{a_n}x_n\right) = \left(\int_0^t e^{a_n\tau}\, d\tau \frac{e^{a_n s}-1}{a_n}x_n\right)_{n\in I\!N^*} =$$

$$= \left(\int_0^t \frac{e^{a_n(\tau+s)}-e^{a_n\tau}}{a_n}\, d\tau x_n\right)_{n\in I\!N^*} =$$

$$= \left(\int_0^t \left[\frac{e^{a_n(\tau+s)}-1}{a_n} - \frac{e^{a_n\tau}-1}{a_n}\right]\, d\tau x_n\right)_{n\in I\!N^*} =$$

$$= \left(\int_0^t \left[\int_0^{\tau+s} e^{a_n u}\, du - \int_0^{\tau} e^{a_n u}\, du\right] d\tau x_n\right)_{n\in I\!N^*} =$$

$$= \int_0^t \left[\left(\int_0^{\tau+s} e^{a_n u}\, du x_n\right)_{n\in I\!N^*} - \left(\int_0^{\tau} e^{a_n u}\, du x_n\right)_{n\in I\!N^*}\right] d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[S(s+\tau) - S(\tau)\right](x_n)_{n\in I\!N^*}\, d\tau \quad .$$

Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré.
Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $x = \frac{1}{\overline{a_n}}$ et $y = \frac{1}{a_n-\lambda}$ on obtient:

$$\left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} S(t)\, dt \, \frac{1}{\overline{a_n}} \, , \, \frac{1}{a_n - \lambda} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} \int_0^t e^{a_n s} ds dt \, \frac{1}{\overline{a_n(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} \frac{e^{a_n t} - 1}{a_n} dt \, \frac{1}{\overline{a_n(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^\alpha \left[e^{(a_n-\lambda)t} - e^{-\lambda t} \right] dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^\alpha e^{(a_n-\lambda)t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{e^{(a_n-\lambda)\alpha} - 1}{a_n - \lambda} \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \left\langle e^{(a_n-\lambda)\alpha} \frac{1}{|a_n|^2 |a_n-\lambda|^2} \, , 1 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{|a_n|^2 |a_n-\lambda|^2} \, , 1 \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \, , 1 \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(a_n-\lambda)\alpha} \frac{1}{|a_n|^2 |a_n-\lambda|^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2 |a_n-\lambda|^2} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\alpha} e^{-\lambda t}dt\,\frac{1}{|a_n|^2\left(\overline{a_n-\lambda}\right)} \quad .$$

Les dernières deux séries sont convergentes par rapport à $\alpha \to \infty$. Pour la première série, en posant $\alpha \in I\!N$, on voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{(a_n-\lambda)\alpha}\frac{1}{|a_n|^2\,|a_n-\lambda|^2} = e^{-iIm\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\left(n-Re\lambda+2^{n^2}\pi i\right)\alpha}}{|a_n|^2\,|a_n-\lambda|^2} \quad ,$$

d'où il s'ensuit la divergence de cette série pour $n > Re\ \lambda$. Par conséquent, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\left\langle \int_0^{\alpha} e^{-\lambda t}S(t)\,dt\,\frac{1}{\overline{a_n}}\,,\ \frac{1}{a_n-\lambda}\right\rangle$$

est divergente par rapport à $\alpha \to \infty$.

Par contraste avec autres caractérisations des C_0-semi-groupes, la propriété prouvée dans le théorème 2.1.9 peut-être utilisée dans le cas des semi-groupes intégrés, sans imposer des conditions supplémentaires (voir [**Th'90**, pag. 419]).

Définition 3.2.2 *On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un opérateur linéaire*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

défini par: $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si pour tout* $t \geq 0$ *on a*

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)ydr \quad .$$

Remarque 3.2.3 On voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 3.2.4 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *. Alors*

$$\mathcal{C}^2 \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{C}^1$$

et

$$Ax = S''(0)x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{C}^2.$$

Preuve. Compte tenu de la remarque 3.2.3, on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Avec la proposition 3.1.5 (ii) il vient

$$S''(0)S(t)x + S'(0)x - x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré, compte tenu de la proposition 3.1.13, il résulte

$$S''(0)S(t)x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{C}^1$. En utilisant la proposition 3.1.5 (iii), pour tout $x \in \mathcal{C}^2$ il s'ensuit que

$$S(t)S''(0)x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0$$

d'où

$$S(t)[S''(0)x - y] = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent

$$S''(0)x = y \quad , \quad \forall x \in \mathcal{C}^2$$

donc

$$Ax = S''(0)x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{C}^2. \blacksquare$$

Proposition 3.2.5 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Alors A est un opérateur fermé.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors:

$$\|S(s)Ax_n - S(s)y\| \leq \|S(s)\| \, \|Ax - ny\| \quad .$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} S(s)Ax_n = S(s)y$$

uniformément par rapport à $s \in [0,t]$.
Pour $x_n \in \mathcal{D}(A)$ nous avons

$$S(t)x_n - tx_n = \int_0^t S(s)Ax_n ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} [S(t)x_n - tx_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t S(s)Ax_n ds \quad , \quad \forall t \geq 0$$

d'où

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(s)y ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. Donc A est un opérateur fermé.■

Proposition 3.2.6 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Alors*

$$S(t) : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{D}(A)$$

et pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ on a

$$AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a

$$AS(t)x = S(t)Ax \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Avec la proposition 3.2.4 on voit que

$$S(t) : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{D}(A) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ il s'ensuit $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$. En appliquant successivement la proposition 3.2.4 et la proposition 3.1.5 (ii), pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ il en résulte:

$$AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - S'(0)x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu de la proposition 3.1.13, il vient

$$AS(t)x = S'(t)x - x \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, pour $x \in \mathcal{D}(A)$ avec la proposition 3.2.4 et la proposition 3.1.5 (iii) on obtient

$$S(t)Ax = S(t)S''(0)x = S''(0)S(t)x = AS(t)x \quad , \quad \forall t \geq 0. \blacksquare$$

Proposition 3.2.7 *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *. Pour tout* $x \in \mathcal{E}$*, on a* $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$A \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - tx \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve. Pour tous $r, \sigma \geq 0$ on a

$$S(r)S(\sigma) = \int_0^r [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\tau \quad ,$$

d'où

$$\int_0^t S(r)S(\sigma)d\sigma = \int_0^t \int_0^r [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\tau d\sigma$$

ou bien

$$S(r)\int_0^t S(\sigma)d\sigma = \int_0^r \int_0^t [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\sigma d\tau \quad .$$

Par conséquent, $x \in \mathcal{E}$ implique $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in \mathcal{C}^1$ et

$$\frac{d}{dr}S(r)\int_0^t S(\sigma)x d\sigma = \int_0^t [S(r+\sigma) - S(r)]x d\sigma =$$

$$= \int_0^t [S(r+\sigma) - S(\sigma) + S(\sigma) - S(r)]x d\sigma =$$

$$= \int_0^t [S(r+\sigma) - S(\sigma)]xd\sigma + \int_0^t S(\sigma)xd\sigma - \int_0^t S(r)xd\sigma =$$

$$= S(t)S(r)x - tS(r)x + \int_0^t S(r)xd\sigma =$$

$$= S(r)[S(t)x - tx] + \int_0^t S(r)xd\sigma \quad .$$

Compte tenu de la remarque 3.2.3, on voit que $\int_0^t S(\sigma)xd\sigma \in \mathcal{D}(A)$ et

$$A \int_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - tx \quad , \quad \forall t \geq 0.\blacksquare$$

Lemme 3.2.8 *Soient* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *et*

$$\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{E}$$

une application continue telle que

$$\int_0^t \varphi(s)\, ds \in \mathcal{D}(A) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Si

$$A \int_0^t \varphi(s)\, ds = \varphi(t) \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

alors $\varphi(t) = 0$*, pour tout* $t \geq 0$*.*

Preuve. Soient $t \geq 0$ et $r \in [0, t]$ tel que

$$\int_0^r \varphi(s)\, ds \in \mathcal{D}(A).$$

Puisque $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}^1$, il s'ensuit que

$$\int_0^r \varphi(s)\, ds \in \mathcal{C}^1.$$

Compte tenu de la remarque 3.2.3, on obtient:

$$\frac{d}{dr}\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right] =$$

$$= \frac{d}{dr}[S(t-r)]\int_0^r \varphi(s)\, ds + S(t-r)\frac{d}{dr}\left[\int_0^r \varphi(s)\, ds\right] =$$

$$= -\int_0^r \varphi(s)\, ds - S(t-r)A\int_0^r \varphi(s)\, ds + S(t-r)\varphi(r) =$$

$$= -\int_0^r \varphi(s)\, ds - S(t-r)\varphi(r) + S(t-r)\varphi(r) =$$

$$= -\int_0^r \varphi(s)\, ds \quad .$$

Par intégration par rapport à $r \in [0,t]$, il en résulte

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right] dr = -\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr$$

ou bien

$$\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right]\Bigg|_0^t = -\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr$$

Par conséquent

$$\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr = 0$$

d'où il s'ensuit que $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.$\blacksquare$

Théorème 3.2.9 (l'unicité de l'engendrement) *Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ deux semi-groupes intégrés ayant pour générateur le même opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a $S(t) = U(t)$.*

Preuve. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ on considère l'application

$$\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$\varphi(t) = S(t) - U(t)$$

Compte tenu de la proposition 3.2.7, on obtient

$$\begin{aligned} A\int_0^t \varphi(s)\,ds &= A\int_0^t S(s)x\,ds - \int_0^t U(s)x\,ds = \\ &= S(t)x - tx - U(t)x + tx = \varphi(t) \quad , \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Avec le lemme 3.2.8 il s'ensuit

$$\varphi(t) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0$$

d'où l'affirmation de l'énoncé en découle immédiatement.■

Remarque 3.2.10 La définition 3.2.2 peut être etendue dans le cas des semi-groupe intégrés dégénéré. On appelle *générateur* d'un semi-groupe intégré dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ l'application

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow 2^{\mathcal{E}}$$

définie par: $x, y \in \mathcal{E}$ et $y \in Ax$ si et seulement si

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y\,dr \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Si on posse

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{E} | Ax \neq \emptyset\},$$

alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y \in Ax$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu de la définition de l'espace non-dégénéré, on peut établir un procédé par lequel le cas des semi-groupe intégrés dégénérés peut-être réduit au cas des semi-groupes intégrés non-dégénérés. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré dégénéré ayant pour générateur l'opérateur A et pour l'espace dégénéré l'ensemble $\mathcal{N}$, alors on considère l'espace facteur $\mathcal{E}/_{\mathcal{N}}$ et les opérateurs induits

$$[S(t)][x] = [S(t)x]$$

et

$$[A][x] = \{[y] \mid y \in Ax\}$$

où

$$\mathcal{D}([A]) = \{[x] \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$$

et

$$[x] = x + \mathcal{N} \in \mathcal{E}/_{\mathcal{N}} \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

On peut prouver (voir [**Th'90**, pag. 423]) que $\{[S(t)]\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré ayant pour générateur l'opérateur $[A]$.

3.3 Semi-groupes intégrés non-dégénéré exponentiellement bornés

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré.

Définition 3.3.1 *On dit que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné s'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in I\!\!R$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 3.3.2 Il existe des semi-groupes intégrés qui ne sont pas exponentiellement bornés comme on peut voir dans l'exemple 3.2.1. Pour un semi-groupe intégré exponentiellement borné $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, l'intégrale de Laplace

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

existe pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Si, en plus, le semi-groupe est non-dégénéré, alors on peut montrer le théorème suivant (voir [**Ar'87**], [**KH'89**], [**Ne'88**], [**Th'90**]).

Théorème 3.3.3 *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in I\!R$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

et ayant l'espace non-dégénéré $\mathcal{N} = \{0\}$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes:
i) la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné ayant pour générateur l'opérateur A;
ii) $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt \quad .$$

Preuve. i)$\Longrightarrow$ ii) Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ considérons l'application

$$R(\lambda)x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \quad .$$

Compte tenu de la remarque 3.1.4 et de la proposition 3.1.5 (i), nous obtenons:

$$\frac{d}{dr} S(r)R(\lambda)x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dr} S(r)S(t)x\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(r+t) - S(r)\right] x\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t+r) - S(t)\right] x\, dt + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(r)x\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(r) \frac{d}{dt} S(t)x\, dt + R(\lambda)x - S(r)x =$$

$$= \lambda S(r) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x\, dt + R(\lambda)x - S(r)x =$$

$$= \lambda S(r) \left[e^{-\lambda t} S(t)x \Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right] + R(\lambda)x - S(r)x =$$

$$= \lambda S(r)R(\lambda)x + R(\lambda)x - S(r)x =$$

$$= S(r)[\lambda R(\lambda)x - x] + R(\lambda)x \quad .$$

Par suite

$$S(t)R(\lambda)x = \int_0^t S(r)[\lambda R(\lambda)x - x]\, dr + tR(\lambda)x$$

Avec la définition 3.2.2 on voit que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$

d'où

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)Ax\, dr \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu de la proposition 3.2.6, nous avons

$$R(\lambda)Ax = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)x \, dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{d}{dt} S(t)x - x \right] dt =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x \, dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} x \, dt =$$

$$= \lambda \left[e^{-\lambda t} S(t)x \Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right] - x =$$

$$= \lambda R(\lambda)x - x$$

d'où nous obtenons

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Par conséquent $\lambda I - A$ est un opérateur inversible, donc $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) \, dt \quad .$$

ii)$\Longrightarrow$ i) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) \, dt \quad .$$

Avec le théorème 3.1.1 on voit que

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r) \, dr - \int_0^s S(r) \, dr \quad , \quad \forall t, s \geq 0.$$

On peut vérifier facilement que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné. Nous allons maintenant montrer que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a pour générateur l'opérateur A. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ nous avons

$$x = R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)Ax =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax\, dt =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt - \lambda \left[\left(e^{-\lambda t} \int_0^t S(s)Ax\, ds \right)\Bigg|_{t=0}^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S(s)Ax\, ds \right] =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\, ds \right] dt \quad .$$

D'autre part

$$x = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} tx\, dt \quad .$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\, ds \right] dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} tx\, dt \quad .$$

Avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace [**Wi'71**, 5.7, cor 7.2], il vient

$$S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\, ds = tx \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit donc que A est le générateur du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.■

3.4 Le théorème de Arendt

Dans la théorie des semi-groupe intégré, une grande importance revient à un théorème de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction à valeurs réelles, montré par WIDDER en 1934.

Théorème 3.4.1 (Widder) *Soient $r : \Lambda_0 \longrightarrow I\!R$ une fonction et $M \geq 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
i) $r \in \mathcal{C}(\Lambda_0)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ on a

$$\left|r^{(n)}(\lambda)\right| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in I\!N;$$

ii) il existe une fonction $f \in L^\infty[0,\infty)$ avec la propriété $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$, tel que

$$r(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda_0.$$

La preuve de ce théorème peut-être trouver dans [**Wi'34**] ou [**Wi'71**]. On peut remarquer facilement une grande analogie entre le théorème de Widder et le théorème de Hille-Yosida. En effet, compte tenu de l'égalité

$$R(\lambda; A)^{(n)} = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \quad , \quad \forall n \in I\!N$$

la relation (ii) du théorème de Hille-Yosida est équivalente avec

$$\left\|R(\lambda; A)^{(n)}\right\| \leq \frac{Mn!}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in I\!N.$$

Malheureusement, en 1960 Zaidman a prouvé que c'est impossible d'etendre le théorème de Widder aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach arbitraire [**Za'60**]. Arendt a prouvé dans [**Ar'87**, pag. 329] une version "intégré" du théorème de Widder pour fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 3.4.2 (Widder-Arendt) *Soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach, $a > 0$, $R : \Lambda_a \longrightarrow \mathcal{E}$ une fonction, $M \geq 0$ et $\omega \in (-\infty, a]$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
i) $R \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_a, \mathcal{E})$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on a

$$\left\|R(\lambda)^{(n)}\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in I\!N;$$

ii) il existe une fonction $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{E}$ *avec les propriétés*

$$F(0) = 0$$

et

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq M e^{\omega(t+h)} h \quad , \quad \forall t, h \geq 0,$$

tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ *on a*

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)\, dt \quad .$$

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii) Pour $x^* \in \mathcal{E}^*$ nous considérons l'application

$$r : \Lambda_0 \longrightarrow I\!R$$

$$r(\mu) = \langle R(\mu + a), x^* \rangle$$

Alors pour tout $\mu \in \Lambda_0$ on obtient

$$\begin{aligned} \left| r(\mu)^{(n)} \right| &\leq \left\| R(\mu + a)^{(n)} \right\| \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \leq \\ &\leq \frac{Mn!}{[\text{Re } (\mu + a) - \omega]^{n+1}} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \leq \\ &\leq \frac{Mn!}{(\text{Re } \mu)^{n+1}} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad , \quad \forall n \in I\!N. \end{aligned}$$

Avec le théorème 3.4.1 on voit qu'il existe une fonction $g(., x^*) \in L^\infty[0, \infty)$ (qui dépend de x^*) avec la propriété

$$\|g\,(t, x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)} \leq M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

tel que

$$r(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} g\,(t, x^*)\ dt \quad , \quad \forall \mu \in \Lambda_0.$$

Pour tout $\omega \in (-\infty, a]$ considérons l'application

$$p_\omega : \Lambda_\omega \longrightarrow I\!R$$

$$p_\omega(\lambda) = r(\lambda - \omega) \quad .$$

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on obtient

$$\begin{aligned} p_\omega(\lambda) &= r(\lambda-\omega) = \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} g(t, x^*)\ dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\omega t} g(t, x^*)\ dt \end{aligned}$$

et en posant

$$f(t, x^*) = e^{\omega t} g(t, x^*)\ dt \quad , \quad t \geq 0$$

il en résulte que

$$p_\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t, x^*)\ dt \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda_\omega .$$

De plus, $f(., x^*) \in L^\infty[0, \infty)$ et

$$\|f(t, x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)} \leq M e^{\omega t} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Définissons l'application

$$F(., x^*) : [0, \infty) \longrightarrow I\!R$$

$$F(t, x^*) = \int_0^t f(s, x^*)\ ds \quad .$$

Il s'ensuit que $F(0, x^*) = 0$, pour tout $x^* \in \mathcal{E}^*$. De plus

$$\begin{aligned} p_\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t, x^*)\ dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} F(t, x^*)\ dt = \\ = e^{-\lambda t} F(t, x^*)\Big|_{t=0}^\infty &+ \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t, x^*)\ dt = \\ = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t, x^*)\ dt \quad . \end{aligned}$$

Comme $F(., x^*)$ est une application continue, avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace [**Wi'71**, 5.7, cor.7.2] il en résulte que $F(., x^*)$ est une application linéaire par rapport à $x^* \in \mathcal{E}^*$. De plus, pour tout $x^* \in \mathcal{E}^*$ et pour tous $t, h \geq 0$ nous obtenons:

$$|F(t+h, x^*) - F(t, x^*)| =$$

$$= \left| \int_0^{t+h} f(s, x^*)\ ds - \int_0^t f(s, x^*)\ ds \right| =$$

$$= \left| \int_t^{t+h} f(s, x^*)\ ds \right| \leq \int_t^{t+h} |f(s, x^*)|\ ds \leq$$

$$\leq \int_t^{t+h} \|f(s, x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)}\ ds \leq M \int_t^{t+h} e^{\omega t}\, ds\, \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \leq$$

$$\leq M \sup_{s\in[t,t+h]} e^{\omega t} h \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} = M e^{\omega(t+h)} h \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad .$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, il existe $F(t) \in \mathcal{E}^{**}$ tel que

$$F(t, x^*) = \langle F(t), x^* \rangle \quad , \quad \forall x^* \in \mathcal{E}^*.$$

Donc pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ et tout $x^* \in \mathcal{E}^*$ on voit que $p_a(\lambda) = r(\lambda - a)$ d'où il s'ensuit que

$$\langle R(\lambda), x^* \rangle = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle F(t), x^* \rangle\ dt \quad .$$

Par conséquent

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)\, dt \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda_a,$$

où $F(t) \in \mathcal{E}^{**}$, pour tout $t \geq 0$.

Pour montrer (ii), il est suffisant de prouver que $F(t) \in \mathcal{E}$, pour tout $t \geq 0$. Pour cela, on peut indentifier l'espace $\mathcal{E}$ par un sous-espace fermé de $\mathcal{E}^{**}$, en utilisant l'inclusion canonique

$$\mathcal{E} \ni x \longmapsto i_x \in \mathcal{E}^{**}$$

$$i_x(y^*) = y^*(x) \quad , \quad \forall y^* \in \mathcal{E}^*.$$

Soit

$$\Phi : \mathcal{E}^{**} \longrightarrow \mathcal{E}^{**}/_{\mathcal{E}}$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda_a$, on obtient $R(\lambda) \in \mathcal{E}$. Par conséquent

$$0 = \Phi\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(F(t))\,dt \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda_a.$$

Avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace il en résulte

$$\Phi(F(t)) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit que $F(t) \in \mathcal{E}$, pour tout $t \geq 0$. De plus, de l'égalité $F(0, x^*) = 0$ il en résulte $F(0) = 0$ et comme

$$|F(t+h, x^*) - F(t, x^*)| \leq Me^{\omega(t+h)}h\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*}$$

on obtient

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h \quad , \quad \forall t, h \geq 0.$$

ii)$\Longrightarrow$i) Pour tout $x^* \in \mathcal{E}^*$ considérons l'application

$$f : [0, \infty) \longrightarrow I\!R$$

$$f(t) = \langle F(t), x^* \rangle \quad .$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_a$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle R(\lambda), x^* \rangle &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \langle F(t), x^* \rangle \; dt = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\,dt \quad . \end{aligned}$$

De plus, pour tous $t, h \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &= |\langle F(t+h) - F(t), x^* \rangle| \leq \\ \leq \quad \|F(t+h) - F(t)\|\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*} &\leq Me^{\omega(t+h)}h\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent f est une application dérivable p.p. et on a

$$|f'(t)| \leq Me^{\omega t} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} \langle R(\lambda), x^* \rangle &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \int_0^\infty \left(-e^{-\lambda t}\right)' f(t)\, dt = \\ &= -e^{-\lambda t} f(t)\Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(t)\, dt \quad . \end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité

$$\left\langle \frac{d}{d\lambda} R(\lambda), x^* \right\rangle = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} f'(t)\, dt \quad ,$$

par récurrence on obtient

$$\left\langle R^{(n)}(\lambda), x^* \right\rangle = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} f'(t)\, dt \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, on a

$$\left|\left\langle R^{(n)}(\lambda), x^* \right\rangle\right| \leq \int_0^\infty t^n e^{-Re\lambda t} M e^{\omega t} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*}\, dt =$$

$$= M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \int_0^\infty t^n e^{-(Re\lambda - \omega)t}\, dt =$$

$$= M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \frac{n}{Re\ \lambda - \omega} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(Re\lambda - \omega)t}\, dt = \ldots$$

$$\ldots = M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \frac{n!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}$$

d'où il vient

$$\left\|R^{(n)}(\lambda)\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Cette version "intégré" du théorème de Widder décrite dans le théorème 3.4.2 conduit à une caractérisation complète du générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré. Le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème de Arendt* [**Ar'87**], [**Hi'91-1**], [**MPV'97**], [**XL'96**], a la même importance pour les semi-groupes intégrés que le théorème de Hille-Yosida pour les semi-groupes de classe C_0. Nous avons obtenu une preuve presque élémentaire du théorème de Arendt en utilisant l'approximation généralisée de Yosida et une idée de BOBROWSKI [**Bo'94**].

Théorème 3.4.3 (Arendt) *Un opérateur linéaire*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *pour lequel il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in I\!R$ *tel que*

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h \quad , \quad \forall t, h \geq 0$$

si et seulement si

i) A *est un opérateur fermé;*

ii) il existe $a \geq \max\{0, \omega\}$ *tel que* $\Lambda_a \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_a$ *on a*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ Soit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega \in I\!R$ tel que

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h \quad , \quad \forall t, h \geq 0$$

Avec la proposition 3.2.5 on voit que A est un opérateur fermé. Dans l'inégalité précédente on peut prendre $t = 0$. Il s'ensuit que

$$\|S(h)\| \leq Me^{\omega t}h \leq Me^{(\omega+1)h} \quad , \quad \forall h \geq 0.$$

Par conséquent, il existe $a = \max\{\omega+1, 0\} \geq \max\{\omega, 0\}$ tel que

$$\|S(h)\| \leq Me^{ah} \quad , \quad \forall h \geq 0.$$

Avec le théorème 3.3.3 on voit que $\Lambda_a \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on obtient

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt \quad .$$

Compte tenu du théorème 3.4.2, il s'ensuit donc que

$$\left\|R^{(n)}(\lambda; A)\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in I\!N.$$

Pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et tout $n \in I\!N$ on a

$$R^{(n)}(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \quad .$$

Par suite, on a:

$$\left\|(-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in I\!N$$

d'où

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n} \quad , \quad \forall n \in I\!N^*.$$

$\Longleftarrow$ Soit $\{A_\nu\}_{\nu \in \Lambda_a}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A et $\left\{A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}}\right\}_{\nu \in \Lambda_a}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ (la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$), où

$$A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}} = A_\nu \Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$$

Avec le théorème 2.4.5, on déduit que la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}\left(\overline{\mathcal{D}(A)}\right)$ avec la propriété

$$T(t)x = \lim_{Re\nu \to \infty} e^{A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}}t} x \quad , \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\,\lambda > a+\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé. Avec le théorème 2.3.5 on voit qu'il existe $\mu \in \Lambda_a$ tel que $\lambda \in \rho(A_\mu)$, $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et

$$R\left(\lambda; A_\mu\right) = \frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \quad .$$

Alors pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ nous définissons

$$S_\mu(t)x = \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds$$

et nous avons

$$S_\mu(t)x = \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds = R\left(\lambda; A_\mu\right)\left(\lambda I - A_\mu\right) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds =$$

$$= R\left(\lambda; A_\mu\right)\lambda \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds - R\left(\lambda; A_\mu\right) A_\mu \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds =$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] \lambda \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds -$$

$$- \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] e^{A_\mu s} x \Big|_{s=0}^{t} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds -$$

$$- \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] \left(e^{A_\mu t} x - x\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds -$$

$$-\frac{1}{\lambda+\mu}e^{A_\mu t}x - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)e^{A_\mu t}x +$$

$$+\frac{1}{\lambda+\mu}x + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)x =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^t e^{A_\mu s}x\,ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda \int_0^t e^{A_\mu s} R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)x\,ds -$$

$$-\frac{1}{\lambda+\mu}e^{A_\mu t}x - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 e^{A_\mu t} R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)x +$$

$$+\frac{1}{\lambda+\mu}x + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)x$$

compte tenu de l'égalité

$$R(\alpha;A)A_\beta = A_\beta R(\alpha;A) \quad , \quad \forall \alpha,\beta \in \Lambda_a.$$

Comme

$$\left\|e^{A_\mu s}\right\| = \left\|e^{\left(\mu^2 R(\mu;A)-\mu I\right)s}\right\| = \left\|e^{-\mu s I}e^{\mu^2 s R(\mu;A)}\right\| \leq$$

$$\leq e^{-Re\mu s}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k\mu^{2k}R(\mu;A)^k}{k!}\right\| \leq e^{-Re\mu s}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{s^k|\mu|^{2k}\left\|R(\mu;A)^k\right\|}{k!} \leq$$

$$\leq e^{-Re\mu s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k|\mu|^{2k}M}{k!(Re\mu-\omega)^k} = Me^{-Re\mu s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{s|\mu|^2}{Re\mu-\omega}\right)^k}{k!} =$$

$$= Me^{-Re\mu s}e^{\frac{s|\mu|^2}{Re\mu-\omega}} = Me^{\frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu-\omega}s} \quad ,$$

on peut définir la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ où

$$S(t)x = \lim_{Re\mu\to\infty} S_\mu(t)x = \lambda\int_0^t T(s)R(\lambda;A)x\,ds - T(t)R(\lambda;A)x + R(\lambda;A)x \quad ,$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{E}$. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe, il en résulte que la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continue. De plus, pour tout $\mu \in \Lambda_a$, tout $x \in \mathcal{E}$ et tous $s, t \geq 0$ on obtient:

$$S_\mu(s)S_\mu(t)x = \int_0^s e^{A_\mu u} S_\mu(t)x \, du = \int_0^s e^{A_\mu u} \int_0^t e^{A_\mu v} x \, dv \, du =$$

$$= \int_0^s \int_0^t e^{A_\mu (u+v)} x \, dv \, du = \int_0^s \int_u^{u+t} e^{A_\mu r} x \, dr \, du =$$

$$= \int_0^s \int_0^{u+t} e^{A_\mu r} x \, dr \, du - \int_0^s \int_0^u e^{A_\mu r} x \, dr \, du =$$

$$= \int_0^s S_\mu(u+t) \, du - \int_0^s S_\mu(u) \, du =$$

$$= \int_0^s \left[S_\mu(u+t) - S_\mu(u) \right] x \, du \quad .$$

Par passage à la limite pour $Re\ \mu \to \infty$ il s'ensuit que

$$S(s)S(t)x = \int_0^s \left[S(u+t) - S(u) \right] x \, du$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tous $s, t \geq 0$. Comme $S(0) = 0$, avec la définition 3.1.3 on déduit que la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré. De plus, pour tous $t, h \geq 0$ on obtient

$$\|S(t+h) - S(t)\| = \lim_{Re\mu \to \infty} \left\| \int_0^{t+h} e^{A_\mu s} \, ds - \int_0^t e^{A_\mu s} \, ds \right\| =$$

$$= \lim_{Re\mu \to \infty} \left\| \int_t^{t+h} e^{A_\mu s} \, ds \right\| \leq \lim_{Re\mu \to \infty} \int_t^{t+h} \left\| e^{A_\mu s} \right\| \, ds \leq$$

$$\leq \lim_{Re\mu \to \infty} \int_t^{t+h} M e^{\frac{\omega Re\mu + Im^2 \mu}{Re\mu - \omega} s} \, ds \leq$$

$$\leq \lim_{Re\mu \to \infty} M e^{\frac{\omega Re\mu + Im^2 \mu}{Re\mu - \omega} (t+h)} h = M e^{\omega (t+h)} h \quad .\blacksquare$$

Chapitre 4

Générateurs essentiels sur un espace localement convexe

4.1 C_0-semi-groupes sur les espaces localement convexes

La théorie des semi-groupes de classe C_0 a été étendue du cadre des espaces de Banach au cadre plus général des espaces localement convexes dans le travaux de Schwartz [**Sch'58**], Miyadera [**Mi'59**], Komatsu [**Ko'64**], Yosida [**Yo'71**], Kõmura [**Kõ'68**], Õuchi [**Õu'72**], Babalola [**Ba'74**], Dembart [**De'74**], etc. Dans la suite, nous noterons par $(\mathcal{X},\beta)$ un espace localement convexe séparé et par $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{X}$. Puisque $(\mathcal{X},\beta)$ n'est pas nécessairement métrisable, on dit qu'une famille $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(\mathcal{X})$ est *équicontinue* si pour tout semi-norme p continue sur $\mathcal{X}$, il existe une semi-norme q continue sur $\mathcal{X}$ tel que

$$p(Tx)\leq q(x)$$

pour tout $T\in\mathcal{M}$ et tout $x\in\mathcal{X}$ (voir [**Kõ'68**, p.259]). En accord avec [**Yo'71**, Definiton, p.234] on a

Définition 4.1.1 *On dit qu'une famille d'opérateurs linéaires* $\{T(t)\}_{t\geq 0}\subset\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *est un* C_0*-semi-groupe si elle satisfait les propriétés suivantes:*

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour tous* $t, s \geq 0$;

(iii) l'application $[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{X}$ *est continue pour tout* $x \in \mathcal{X}$;

(iv) pour $\omega \in I\!R$, *la famille* $\{e^{-\omega t}T(t)\}_{t \geq 0}$ *est équicontinue.*

Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \left\{ x \in \mathcal{X} \;\middle|\; \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe par rapport à } \beta \right\}$$

par

$$\mathcal{L}x = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{L}).$$

Il est bien connu le fait que si, en plus, $(\mathcal{X}, \beta)$ est séquentiellement complet, alors $\mathcal{L}$ est un opérateur à un domaine dense (voir [**Yo'71**, Theorem 1, p.237]), fermé (voir [**Yo'71**, Corollary 3, p.241]) et sa résolvante

$$R(\lambda; \mathcal{L})x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dx \quad , \lambda > \omega, \;\; x \in \mathcal{X}$$

est continue sur $\mathcal{X}$ (voir [**Yo'71**, Theorem 1, p.240]).

Il faut remarquer le comportement spécial des semi-groupes adjoints. Soient $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ le dual topologique de $(\mathcal{X}, \beta)$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 sur $\mathcal{X}$. Son adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas en général un C_0-semi-groupe sur l'espace dual $\mathcal{Y}$ par rapport à la topologie forte duale $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ (voir [**Yo'71**, Proposition 1, p.195]). Soit $\mathcal{L}'$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ rélatif à la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Si $\mathcal{X}$ est séquentielement complet, le générateur du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ a le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ dense dans $\mathcal{X}$. Par conséquent, l'adjoint $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$ est uniquement déterminé tel que

$$\langle \mathcal{L}x, x^* \rangle = \langle x, \mathcal{L}^*x^* \rangle \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \text{ et } x^* \in \mathcal{D}\left(\mathcal{L}^*\right).$$

On sait que $\mathcal{L}^*$ est fermé par rapport à la topologie $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, et si $\mathcal{X}$ est un espace localement convexe séquentiellement complet, alors $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^*$ (voir [**Kõ'68**, Proposition 2.1, p.263]).

Le résultat le plus important concernant les semi-goupes adjoints est le célèbre théorème

de Phillips ([**Yo'71**, Theorem, p.273]). Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces localement convexes séquentiellement complets, alors $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur la fermeture $\mathcal{Y}^+$ du domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ de l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$ par rapport à la topologie forte de l'espace dual. De plus, le générateur de $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ restreint à $\mathcal{Y}^+$ coïncide avec la restriction de l'opérateur $\mathcal{L}^*$ à l'ensemble $\{y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) \mid \mathcal{L}^* y \in \mathcal{Y}^+\}$.
Si $\mathcal{X}$ est un espace reflexif, alors $\mathcal{Y}^+ = \mathcal{Y}$ et le théorème de Phillips s'applique très facilement. Autrement, la caractérisation du domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ et de sa fermeture $\mathcal{Y}^+$ deviénnent une problème très difficile dans le cas des exemples concrets.

4.2 Domaines d'unicité

Dans les applications le domaine du générateur $\mathcal{L}$ est souvent difficile à décrire et pour ce motif on préfère travailler sur un sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ bien choisi (voir [**Da'80**, p.7]).

Définition 4.2.1 *On dit que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ est un core du générateur $\mathcal{L}$ si pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{D}$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{L} f_n = \mathcal{L} f.$$

On remarque que $\mathcal{D}$ est un core pour générateur $\mathcal{L}$ si $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ par rapport à la topologie du graphe du $\mathcal{L}$ induite par la topologie β ou, équivalent, si $\overline{\mathcal{L}_{/\mathcal{D}}} = \mathcal{L}$, c'est-à-dire $\mathcal{L}$ coïncide avec la restriction de la fermeture de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{D}$ (voir [**EK'86**, p.16]). Il n'est pas très facile de déterminer sous quelles conditions un sous-espace donné $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ est un core pour $\mathcal{L}$, mais le critère suivant est utile quand le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est donné explicitement. Ce résultat est bien connu dans le cas des espaces de Banach, mais les preuves données par Arendt [**Ar'86**, Corollary 1.34, p.47] ou Davies [**Da'80**, Theorem 1.9, p.8] utilisent en grande mesure la structure d'espace de Banach.

Proposition 4.2.2 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}$. Supposons que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$. Si $T(t)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ est un core pour $\mathcal{L}$.*

Preuve. Nous présenterons une preuve élémentaire suivant de près [**Wu'01**, Lemma 3.5, p.68]. Soit $\lambda > \omega$ arbitrairement fixé, où ω est choisi tel que la famille $\{e^{-\omega t}T(t)\}$ soit équicontinue. Soit $A = \mathcal{L}_{/\mathcal{D}}$ la restriction de l'opérateur $\mathcal{L}$ à $\mathcal{D}$. Nous allons montrer que $(\lambda I - A)(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$. Pour cela, compte tenu du théorème de Hahn-Banach ([**Ga'81**, Consecinţa 2, p.281]), il est suffisant de prouver que si $y_0 \in \mathcal{Y}$ satisfait l'égalité

$$\langle (\lambda I - A)x, y_0 \rangle = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

alors $y_0 = 0$. En effet, si on fixe un tel y_0, alors pour tout $x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et tout $t \geq 0$ on a:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\langle x, e^{-\lambda t}T^*(t)y_0 \right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle e^{-\lambda t}T(t)x, y_0 \right\rangle = \\ = \; & \left\langle -\lambda e^{-\lambda t}T(t)x + e^{-\lambda t}\mathcal{L}T(t)x, y_0 \right\rangle = \\ = \; & \left\langle (-\lambda I + \mathcal{L})e^{-\lambda t}T(t)x, y_0 \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

parce que $e^{-\lambda t}T(t)x \in \mathcal{D}$ compte tenu de l'hypothèse. Il s'ensuit que $\left\langle x, e^{-\lambda t}T^*(t)y_0 \right\rangle$ est une constante. D'autre part, nous avons

$$e^{-\lambda t}T^*(t)y_0 \longrightarrow 0$$

par rapport à la topologie $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ pour $t \to \infty$. Par conséquent

$$\left\langle x, e^{-\lambda t}T^*(t)y_0 \right\rangle = 0, \quad , \quad \forall t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{D}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$, on déduit que $y_0 = 0$.
Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, il existe une famille dirigée $(x)_\alpha \subset \mathcal{D}$ telle que

$$(\lambda I - A)x_\alpha \longrightarrow (\lambda I - \mathcal{L})x \quad .$$

Compte tenu de la continuité de la résolvante, on voit que

$$x_\alpha = R(\lambda;\mathcal{L})[(\lambda I - A)x_\alpha] \longrightarrow R(\lambda;\mathcal{L})(\lambda I - \mathcal{L})x = x$$

et de la continuité de l'opérateur

$$\mathcal{L}R(\lambda;\mathcal{L}) = \lambda R(\lambda;\mathcal{L}) - I$$

on obtient

$$\mathcal{L}x_\alpha = \mathcal{L}R(\lambda;\mathcal{L})[(\lambda I - A)x_\alpha] \longrightarrow \mathcal{L}R(\lambda;\mathcal{L})[(\lambda I - \mathcal{L})x] = \mathcal{L}x.$$

Par conséquent la fermeture de A est $\mathcal{L}$. ■

Il est très important savoir quels sous-espaces de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ déterminent le semi-groupe de façon unique. Plus précisément, ce problème peut-être formulé de la manière suivante: soit $\mathcal{D}$ un sous-espace de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et considérons la restriction A de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{D}$. Dans lesquelles conditions sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ est l'unique extension de A qui est un générateur? Dans la suite nous rapellerons quelques résultats bien connus pour les calibrations. Une *calibration* pour un espace localement convexe $(\mathcal{X},\beta)$ est une famille Γ de semi-normes continues qui engendre la topologie β sur $\mathcal{X}$. Une famille de ce type a été utilisée par FATTORINI [**Fa'68**], MOORE [**Mo'69**], CHILANA [**Ch'70**], CHOE [**Ch'85**] et autres.

Soit $p \in \Gamma$. Un opérateur linéaire T dans $\mathcal{X}$ s'appelle *p-continu* si

$$\tilde{p}(T) := \sup_{p(x)\leq 1} p(Tx) < \infty$$

et s'appelle Γ-*continu* s'il est p-continu pour tout $p \in \Gamma$. On dit que T est Γ-*fini* si

$$\|T\|_\Gamma := \sup_{p\in\Gamma} \tilde{p}(T) < \infty \quad .$$

De plus, si $\|T\|_\Gamma \leq 1$, alors on dit que T est une Γ-*contraction*.

Le résultat suivant obtenu par MOORE [**Mo'69**, Theorem 4, p. 70], donne une très jolie caractérisation des semi-groupes équicontinus.

Lemme 4.2.3 *Un semi-groupe $\mathcal{F}$ est équicontinu sur $\mathcal{X}$ si et seulement s'il existe une calibration Γ pour $\mathcal{X}$ telle que $\mathcal{F}$ est un semi-groupe de Γ-contractions.*

Enfin, le résultat suivant de Choe [**Ch'85**, Corollary 5.4, p. 312], est très important pour la preuve de notre théorème suivant.

Lemme 4.2.4 *Soit* Γ *une calibration pour l'espace localement convexe* $(\mathcal{X}, \beta)$. *Si* A *est le générateur d'un* C_0*-semi-groupe sur* $\mathcal{X}$ *et* B *est un opérateur linéaire* Γ*-fini dans* $\mathcal{X}$, *alors* $A + B$ *est le générateur d'un* C_0*-semi-groupe sur* $\mathcal{X}$.

Revenons maintenant à notre devoir. Le théorème suivant (voir [**LW'06**]) qui est très bien connu dans le cas des espaces de Banach (voir [**Ar'86**, Theorem 1.33, p. 46]) est le résultat le plus important de notre thèse.

Théorème 4.2.5 *Soient* $(\mathcal{X}, \beta)$ *un espace localement convexe séparé séquentiellement complet,* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* $\mathcal{X}$ *ayant pour générateur l'opérateur* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{D}$ *un sous-espace de* $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. *Considérons la restriction* A *de* $\mathcal{L}$ *à* $\mathcal{D}$. *Si* $\mathcal{D}$ *n'est pas un core de* $\mathcal{L}$, *alors il existe un nombre infini d'extensions de* A *qui sont des générateurs.*

Preuve. On considère l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ doté de la topologie $\beta_{\mathcal{L}}$ du graphe de $\mathcal{L}$ induite par la topologie β. Si, par contre, $\mathcal{D}$ n'est pas un core de $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ par rapport à la topologie du graphe $\beta_{\mathcal{L}}$. Avec le théorème de Hahn-Banach on voit qu'il existe une fonctionnelle linéaire non-nulle ϕ continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ par rapport à la topologie du graphe $\beta_{\mathcal{L}}$ tel que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On fixe $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $u \neq 0$, nous considérons l'opérateur linéaire

$$C : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

$$Cx = \phi(x)u \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{L}).$$

Alors C est $\beta_{\mathcal{L}}$-continu (c'est-à-dire continu par rapport à la topologie du graphe $\beta_{\mathcal{L}}$) sur $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Il faut remarquer que C est $\beta_{\mathcal{L}}$-continu si et seulement si pour un (ou pour tout) $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{L})$,

$$\tilde{C} := (\lambda_0 I - \mathcal{L})CR(\lambda_0; \mathcal{L})$$

est β-continu sur $\mathcal{X}$.

Soit $\Theta = CR(\lambda_0; \mathcal{L})$. Puisque pour tout $x \in \mathcal{X}$ nous avons

$$\Theta x = CR(\lambda_0; \mathcal{L})x = \phi\left(R(\lambda_0; \mathcal{L})x\right)u$$

$$\Theta^2 x = \Theta(\Theta x) = \phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})\Theta x\right) u = \phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})\phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})x\right) u\right) u =$$

$$= \phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})x\right) \phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})u\right) u \quad ,$$

et

$$\Theta^n x = \phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})x\right) \phi^{n-1}\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})u\right) u$$

quelque soit $n \in I\!N^*$, on voit que la famille

$$\left\{ \frac{[CR(\lambda_0;\mathcal{L})]^n}{\left|\phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})u\right)\right|^{n-1}} \right\}_{n \in I\!N^*}$$

est équicontinue. On peut prendre $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $u \neq 0$ tel que

$$\left|\phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})u\right)\right| < 1 \quad .$$

Par conséquent l'opérateur linéaire $U = I - CR(\lambda_0;\mathcal{L})$ est inversible et U et U^{-1} sont β-continus sur $\mathcal{X}$. De plus, comme dans la preuve du [**Ar'86**, Theorem 1.31, p. 45], on a

$$\begin{aligned}
U\left(\mathcal{L} + \tilde{C}\right)U^{-1} &= U\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I + \lambda_0 I + \tilde{C}\right)U^{-1} = \\
&= U\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I + \tilde{C}\right)U^{-1} + \lambda_0 I = \\
&= U\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I + (\lambda_0 I - \mathcal{L})\, CR(\lambda_0;\mathcal{L})\right)U^{-1} + \lambda_0 I = \\
&= U\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I\right)\left(I - CR(\lambda_0;\mathcal{L})\right)U^{-1} + \lambda_0 I = \\
&= U\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I\right) + \lambda_0 I = \\
&= \left[I - CR(\lambda_0;\mathcal{L})\right]\left(\mathcal{L} - \lambda_0 I\right) + \lambda_0 I = \\
&= \mathcal{L} - \lambda_0 I + C + \lambda_0 I = \mathcal{L} + C \quad .
\end{aligned}$$

Maintenant il reste à prouver que $\mathcal{L} + \tilde{C}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{X}, \beta)$. Puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{X}$, il existe $\omega \geq 0$ tel que la famille $\{e^{-\omega t}T(t)\}_{t\geq 0}$ est équicontinue. En utilisant le lemme 5.5.1, on voit qu'il existe une calibration Γ pour $(\mathcal{X}, \beta)$ telle que

$$\left\| e^{-\omega t} T(t) \right\|_\Gamma \leq 1 \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Pour tout $p \in \Gamma$ considérons

$$\hat{p}(x) = \sup_{t\geq 0} \left[p\left(e^{-\omega t}T(t)x\right) + \left|\phi\left(R(\lambda_0;\mathcal{L})e^{-\omega t}T(t)x\right)\right|\right] \quad , \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Comme $\hat{p} \geq p$ et $\hat{p}$ est continue, il s'ensuit que la famille $\hat{\Gamma} = \{\hat{p} \mid p \in \Gamma\}$ est une nouvelle calibration pour $(\mathcal{X}, \beta)$. Considérons maintenant la $\hat{\Gamma}$-norme

$$\left\|\tilde{C}\right\|_{\hat{\Gamma}} = \sup_{\hat{p}\in\hat{\Gamma}} \sup_{\hat{p}(x)\leq 1} \hat{p}\left(\tilde{C}x\right)$$

et prouvons que $\tilde{C}$ est $\hat{\Gamma}$-fini, c'est-à-dire

$$\left\|\tilde{C}\right\|_{\hat{\Gamma}} < \infty \quad .$$

Soit $x \in \mathcal{X}$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{C}x &= (\lambda_0 I - \mathcal{L})\, CR(\lambda_0;\mathcal{L})x = (\lambda_0 I - \mathcal{L})\,\phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)\,u = \\ &= \phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)\,(\lambda_0 I - \mathcal{L})\,u = \phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)\,v\end{aligned}$$

où nous avons noté $(\lambda_0 I - \mathcal{L})\, u = v$. Donc

$$\begin{aligned}\hat{p}\left(\tilde{C}x\right) &= \hat{p}\,(\phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)\,v) = |\phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)|\,\hat{p}(v) \\ &\leq [p(x) + |\phi\,(R(\lambda_0;\mathcal{L})x)|]\,\hat{p}(v) \leq \hat{p}(x)\hat{p}(v) \quad .\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{\hat{p}(x)\leq 1} \hat{p}\left(\tilde{C}x\right) \leq \sup_{\hat{p}(x)\leq 1} \hat{p}(x)\hat{p}(v) \leq \hat{p}(v) \quad .$$

Il s'ensuit que $\left\|\tilde{C}\right\|_{\hat{\Gamma}} < \hat{p}(v)$, c'est-à-dire $\tilde{C}$ est $\hat{\Gamma}$-fini. Avec le lemme 5.5.2 on voit que $\mathcal{L} + \tilde{C}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\left\{\tilde{S}(t)\right\}_{t\geq 0}$. Par conséquent

$$S(t) = U\tilde{S}(t)U^{-1}$$

est un C_0-semi-groupe ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L} + C$ et $\mathcal{L} + C/_{\mathcal{D}} = \mathcal{L}/_{\mathcal{D}}$. Il est évident que par cette méthode on peut construire un nombre infini de générateurs.

■

4.3 C_0-semi-groupes sur le dual d'un espace localement convexe

En général pour un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace $(\mathcal{X}, \beta)$, le semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas fortement continu sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ par rapport à la topologie forte $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ de l'espace dual (voir [**Yo'71**, Proposition 1, p.195]). Différentes théories sortant du cadre des C_0-semi-groupes ont été élaborées, mais le théorème de Hille-Yosida devient très compliqué, voir [**Fe'53-1**], [**Fe'53-2**], [**Dy'65**], [**Je'86**], [**Je'87**] ou [**Ce'94**].

Le but de cette section est d'introduire une nouvelle topologie sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ par rapport à laquelle $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ devient un C_0-semi-groupe ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}^*$. Excepté la topologie forte $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, qui est la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-bornés de $\mathcal{X}$, sur l'espace dual $\mathcal{Y}$ on peut utiliser souvent deux autres topologies:

- la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y}.\mathcal{X})$, qui est la plus faible des topologies localement convexes pour lesquelles le dual du $\mathcal{Y}$ est $\mathcal{X}$;
- la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, qui est la plus forte topologie localement convexe par rapport à laquelle le dual de $\mathcal{Y}$ est $\mathcal{X}$. Comme il resulte du théorème de Mackey-Arens [**Sc'71**, Theorem 3.2, p.131], $\tau(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles convexes, équilibrés, $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-compacts de $\mathcal{X}$ [**Sc'71**, Corollary 1, p.131].

Malheureusement ces topologies ne sont pas adéquates pour notre but. Compte tenu des résultats de Köthe [**Kö'69**, p.263], on peut introduire sur $\mathcal{Y}$ la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $(\mathcal{X}, \beta)$ notée par $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ (voir [**WZ'06**]). Cette nouvelle topologie dépend non seulement de la paire duale $\langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$, mais elle dépend aussi de la topologie originale.

Une base des voisinages de $y_0 \in \mathcal{Y}$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est donée par:

$$N(y_0; K, \varepsilon) := \left\{ y \in \mathcal{Y} \,\middle|\, \sup_{x\in K} |\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle| < \varepsilon \right\}$$

où K parcourt tous les sous-ensembles compacts de $(\mathcal{X},\beta)$ et $\varepsilon > 0$.

Dans la suite nous révèlerons quelques propriétés de la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ (voir [**LG'06**]).

Théorème 4.3.1 *Soit A une application continue sur $(\mathcal{X},\beta)$. Alors l'adjoint A^* de A est continu sur $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^*$ simultanément pour la topologie forte duale $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, pour la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, pour la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ et pour la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $(\mathcal{X},\beta)$.*

Preuve. La continuité de l'opérateur A^* par rapport à la topologie forte duale $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ et pour la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ est bien-connue [**Ga'81**, Propoziţia 3.4.12, p.169]. Comme le dual de $(\mathcal{Y},\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$ est $\mathcal{X}$, la continuité de A^* par rapport à la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ implique la continuité de A^* par rapport à la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ compte tenu de [**Sc'71**, Theorem 7.4, p.158].
Pour prouver la continuité de A^* par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, soit K un sous-ensemble compact de $(\mathcal{X},\beta)$. Alors

$$\sup_{x\in K}|\langle x,A^*y\rangle| = \sup_{x\in K}|\langle Ax,y\rangle| = \sup_{x\in A(K)}|\langle x,y\rangle| \quad .$$

Comme $A(K)$ est un sous-ensemble compact, il en résulte que A^* est continu par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. ■

Théorème 4.3.2 *Si $(\mathcal{X},\beta)$ est un espace localement convexe quasi-complet, alors la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ est plus faible que la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. De plus, on a $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))^*=(\mathcal{X},\beta)$.*

Preuve. Soit B un sous-ensemble compact de $(\mathcal{X},\beta)$ et C sa enveloppe fermée convexe et équilibrée. Alors C est un ensemble borné, donc complet par rapport à la topologie forte β, compte tenu de la quasi-complètitude de $(\mathcal{X},\beta)$. Par conséquent C est un ensemble complet par rapport à la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. Avec [**Sc'71**, Theorem 11.5, p.189] il en résulte que C est un ensemble compact de $(\mathcal{X},\beta)$. Il s'ensuit que la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ est plus faible que la topologie $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$.
Comme la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ est plus forte que la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, il en résulte que le dual de $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$ coïncide avec $(\mathcal{X},\beta)$. ■

Théorème 4.3.3 *Soient $(\mathcal{X}, \beta)$ un espace localement convexe séparé quasi-complet bornologique et $\mathcal{Y}$ son dual doté de la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Alors:*
(i) tout sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné de $\mathcal{Y}$ est $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné. De plus, la restriction de la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ à un sous-ensemble $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné de $\mathcal{Y}$ coïncide avec $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$;
(ii) $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ est quasi-complet;
(iii) la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\mathcal{C}})$, où $\mathcal{Y}_{\mathcal{C}} = (\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$, coïncide avec la topologie β de $\mathcal{X}$.

Preuve. (i) Soit B un sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné de $\mathcal{Y}$. Puisque la topologie $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est plus faible que la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, on déduit que B est $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné dans $\mathcal{Y}$. Avec [**Sc'71**, Theorem 5.3, p. 142] on voit que B est $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné dans $\mathcal{Y}$. De plus, soit B un sous-ensemble $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné de $\mathcal{Y}$. En utilisant [**Sc'71**, Corollary, p.63], il s'ensuit que $\mathcal{X}$ est un espace tonnelé et avec [**Sc'71**, Theorem 5.2, p.141] on voit que B est équicontinu dans $\mathcal{Y}$. Alors avec [**Sc'71**, Theorem 4.5, p.85], on déduit que les topologies $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ sont identiques sur B.
(ii) L'affirmation résulte de [**Sc'71**, Theorem 6.1, p. 148].
(iii) Soit B un sous-ensemble $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné de $\mathcal{Y}$. Puisque $\mathcal{X}$ est un espace tonnelé, avec [**Sc'71**, Theorem 5.2, p. 141] on voit que B est $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-relativement compact dans $\mathcal{Y}$. Par conséquent la fermeture $\overline{B}^{\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ par rapport à la topologie $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-compact dans $\mathcal{Y}$. Puisque B est équicontinu, avec [**Sc'71**, Theorem 4.3, p. 84] il s'ensuit que $\overline{B}^{\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ est équicontinu et avec [**Sc'71**, Theorem 4.5, p.85] on voit que $\overline{B}^{\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ est $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-compact dans $\mathcal{Y}$. Donc la topologie β est plus faible que la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\mathcal{C}})$.
Pour l'inverse, soit B un sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-compact dans $\mathcal{Y}$. Alors B est $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-compact dans $\mathcal{Y}$. Comme $(\mathcal{Y}, \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ est un espace de Hausdorff, on obtient que B est $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-relativement compact et $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-fermé dans $\mathcal{Y}$. Comme $\mathcal{X}$ est tonnelé, il résulte que B est $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-borné. Donc la topologie β est plus forte que la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}_{\mathcal{C}})$. ■

Théorème 4.3.4 *Soient $(\mathcal{X}, \beta)$ un espace localement convexe séparé quasi-complet bornologique, $\mathcal{Y}$ son dual doté de la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ et $A : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire avec le domaine $\mathcal{D}(A) = \mathcal{Y}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) A est $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu;
(i') A est $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu;
(i") A est $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu;
(ii) A est $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné et $A^{s*}(\mathcal{X})\subset\mathcal{X}$, où $A^{s*}:\mathcal{X}^{**}\longrightarrow\mathcal{X}^{**}$ est l'adjoint fort dans l'espace bi-dual $\mathcal{X}^{**}\supset\mathcal{X}$;
(iii) il existe un opérateur linéaire U borné dans $(\mathcal{X},\beta)$ tel que $A=U^*$.

Preuve. (i)⇒(ii) Si A est $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu, alors avec [**Sc'71**, Theorem 5.4, p.27] il résulte que l'image $A(B)$ de tout sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné $B\subset\mathcal{Y}$ est $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné. En utilisant le théorème 4.3.3 (i) et (ii), on voit que l'image $A(B)$ de tout sous-ensemble $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné $B\subset\mathcal{Y}$ est $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné. Donc A est $\beta(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-borné.
De plus, en utilisant le théorème 4.3.2 il s'ensuit que $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))^*=(\mathcal{X},\beta)$. Avec le théorème 4.3.1, on voit que si A est $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu, alors A^* est $\tau(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-continu sur $\mathcal{X}$ et

$$A^{s*}x=A^*x\in\mathcal{X}\quad,\quad\forall x\in\mathcal{X}.$$

La même preuve peut être utilisée pour les implications (i')⇒(ii) et (i")⇒(ii).
(ii)⇒(iii) Soit $A^{s*}:\mathcal{X}^{**}\longrightarrow\mathcal{X}^{**}$ tel que $A^{s*}(\mathcal{X})\subset\mathcal{X}$. Définissons

$$U=A^{s*}/_{\mathcal{X}}$$

On remarque que U est un opérateur linéaire défini partout sur $\mathcal{X}$ et $U=A^*$. Avec [**Sc'71**, Theorem 7.4, p.158] on voit que le domaine $\mathcal{D}(A^*)$ est $\sigma(\mathcal{X},\mathcal{Y})$-dense dans $\mathcal{X}$ et avec [**Sc'71**, Theorem 7.1, p.155] on déduit que A a une extension $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-fermée et

$$A^{**}=\overline{A}^{\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})}\supset A$$

Puisque $A^{**}=U^*$ et A est partout défini sur $\mathcal{X}$, il s'ensuit que $U^*=A$.
(iii)⇒(i) Supposons qu'il existe un opérateur linéaire U borné dans $(\mathcal{X},\beta)$ tel que $A=U^*$. Puisque $\mathcal{X}$ est un espace bornologique, il s'ensuit que U est β-continu sur $\mathcal{X}$. Avec la théorème 4.3.1 on voit que $U^*=A$ est $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu dans $\mathcal{Y}$. De la même manière on peut prouver que A est $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu et, respectivement, $\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continu. ■

Le résultat suivant (voir [**WZ'06**, Theorem 1.4, p.564]), est une extension satisfaisante du théorème de Phillips.

Théorème 4.3.5 *Soient $(\mathcal{X},\beta)$ un espace localement convexe séparé séquentiellement complet et $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $(\mathcal{X},\beta)$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur $\mathcal{L}$ avec le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{X},\beta)$. Alors le semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est de classe C_0 sur $\mathcal{Y}$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. De plus, l'adjoint $\mathcal{L}^*$ du générateur $\mathcal{L}$ est le générateur du C_0-semi-groupe $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$, son domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense dans $(\mathcal{Y},\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$ et on a les égalités:*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{L}^*) &= \left\{ y \in \mathcal{Y} \;\middle|\; \lim_{t\searrow 0} \frac{T^*(t)y - y}{t} \text{ existe par rapport à } \mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathcal{Y} \;\middle|\; \lim_{t\searrow 0} \frac{T^*(t)y - y}{t} \text{ existe par rapport à } \sigma(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \right\} \quad .\end{aligned}$$

De même, si $(\mathcal{X},\beta)$ est un espace localement convexe quasi-complet, alors $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense dans $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$.

Preuve. Sans détériorer la généralité, on peut considérer que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est une famille équicontinue et que $T(t)x \longrightarrow 0$ pour $t \to \infty$, quelque soit $x \in \mathcal{X}$ (au contraire on considère la famille $\left\{e^{-\lambda t}T(t)\right\}_{t\geq 0}$ pour $\lambda > \omega$). Avec le théorème 4.3.1 il en résulte que $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$. Nous allons montrer la continuité forte de $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ dans $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$. Soient $y \in \mathcal{Y}$ arbitrairement fixé, $s \geq 0$ et le sous-ensemble compact K de $(\mathcal{X},\beta)$. Alors pour tout $T \geq 0$ on a:

$$\sup_{x\in K} |\langle x, (T^*(t) - T^*(s))\, y\rangle| = \sup_{x\in K} |\langle (T(t) - T(s))\, x, y\rangle| \quad .$$

Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu, il s'ensuit que $(T(t) - T(s))\, x \longrightarrow 0$ pour $t \to 0$, quel que soit $x \in \mathcal{X}$. Compte tenu de l'équicontinuité de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, il en résulte que cette convergence ponctuelle est uniforme pour tout $x \in K$. Donc

$$\lim_{t\to s} \sup_{x\in K} |\langle x, (T^*(t) - T^*(s))\, y\rangle| = 0 \quad , \quad \forall y \in \mathcal{Y},$$

d'où on déduit la continuité forte de $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$. Dans la suite nous prouvons que la famille $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est équicontinue. Cela revient à prouver que pour chaque voisinage

$$N(0;K,\varepsilon)=\left\{y\in\mathcal{Y}\;\middle|\;\sup_{x\in K}|\langle x,y\rangle|<\varepsilon\right\}$$

avec K compact dans $(\mathcal{X},\beta)$ et $\varepsilon>0$, il existe une voisinage

$$N(0;K',\delta)=\left\{y\in\mathcal{Y}\;\middle|\;\sup_{x\in K'}|\langle x,y\rangle|<\delta\right\}$$

avec K' compact dans $(\mathcal{X},\beta)$ et $\delta>0$, tels que pour tout $y\in N(0;K',\delta)$ il en résulte que $T^*(t)y\in N(0;K,\varepsilon)$, quel que soit $t\geq 0$. Soit $N(0;K,\varepsilon)$ avec K compact dans $(\mathcal{X},\beta)$ et $\varepsilon>0$ une voisinage de 0 dans $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$. On peut voir que pour tout $t\geq 0$ et tout $y\in\mathcal{Y}$ nous avons

$$\sup_{x\in K}|\langle x,T^*(t)y\rangle|=\sup_{x\in K}|\langle T(t)x,y\rangle|\leq\sup_{x\in\cup_{t\geq 0}T(t)K}|\langle x,y\rangle|\quad .$$

Soit ∞ le point de compactification de $\mathbb{R}^+$. Définissons l'application

$$g:[0,\infty]\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$$

$$g(t,x):=\begin{cases}T(t)x & ,\quad \text{si } t\in[0,\infty)\\ 0 & ,\quad \text{si } t=\infty\quad .\end{cases}$$

Il est évident que cette application est continue par rapport à $t\in[0,\infty]$ et équicontinue par rapport à $x\in\mathcal{X}$. Alors l'ensemble

$$K':=g\left([0,\infty]\times K\right)$$

est compact et

$$\bigcup_{t\geq 0}T(t)K\subset K'\quad .$$

Il en résulte que pour tout $y\in N(0;K',\varepsilon)$ on a:

$$\sup_{x\in K}|\langle x,T^*(t)y\rangle|=\sup_{x\in K}|\langle T(t)x,y\rangle|\leq\sup_{x\in\cup_{t\geq 0}T(t)K}|\langle x,y\rangle|\leq\sup_{x\in K'}|\langle x,y\rangle|<\varepsilon$$

d'où il s'ensuit que $T^*(t)y \in N(0; K, \varepsilon)$.
Par conséquent, $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$.
Nous montrons maintenant les propriétés du générateur du semi-groupe $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$. Soient $\mathcal{L}^*$ l'adjoint de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ le générateur de $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$. En appliquant [**Yo'71**, Theorem 1, p.237], on voit que $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$ et, par conséquent, l'adjoint $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$ est correctement défini. Soit $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ nous obtenons

$$\langle x, T^*(t)y - y\rangle = \langle T(t)x - x, y\rangle = \left\langle \int_0^t \mathcal{L}T(s)x\, ds, y \right\rangle = \left\langle \int_0^t T(s)x\, ds, \mathcal{L}^*y \right\rangle \quad .$$

Comme $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$, ces égalités restent valables pour tout $x \in (\mathcal{X}, \beta)$. Alors pour tout compact K de $(\mathcal{X}, \beta)$ il s'ensuit que

$$\lim_{t\searrow 0} \sup_{x\in K} \left| \left\langle x, \frac{T^*(t)y - y}{t} - \mathcal{L}^*y \right\rangle \right| = \lim_{t\searrow 0} \sup_{x\in K} \left| \left\langle \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x\, ds - x, \mathcal{L}^*y \right\rangle \right| = 0$$

puisque $T(t)x \longrightarrow x$ uniformément sur le compact K. Il en résulte donc que $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ et $\mathcal{L}'y = \mathcal{L}^*y$ d'où on obtient $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}'$.
Pour l'inclusion inverse, nous définissons

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}") = \left\{ y \in \mathcal{Y} \;\middle|\; \lim_{t\searrow 0} \frac{T^*(t)y - y}{t} \text{ existe par rapport à } \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \right\}$$

et

$$\mathcal{L}"y = \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) - \lim_{t\searrow 0} \frac{T^*(t)y - y}{t}$$

quel que soit $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}")$. Nous allons montrer que $\mathcal{L}" \subset \mathcal{L}^*$. Soit $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}")$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, compte tenu que le dual de $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ est $(\mathcal{X}, \beta)$, nous obtenons:

$$\langle x, \mathcal{L}"y\rangle = \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) - \lim_{t\searrow 0} \left\langle x, \frac{T^*(t)y - y}{t} \right\rangle = \lim_{t\searrow 0} \left\langle \frac{T(t)y - y}{t}, y \right\rangle = \langle \mathcal{L}x, y\rangle \quad ,$$

d'où il s'ensuit que $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ et $\mathcal{L}^*y = \mathcal{L}"y$.
Par conséquent nous avons obtenu les inclusions suivantes

$$\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}" \subset \mathcal{L}^*$$

d'où nous déduisons les égalités de l'énoncé.
Montrons maintenant la densité de $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ dans $(\mathcal{Y}, \tau(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Puisque $\mathcal{L}$ est densément défini et fermé, avec [**Kö'79**, Theorem 3, p.84] on voit que $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense dans $(\mathcal{Y}, \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$. Comme $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est un sous-espace vectoriel, en appliquant [**Ga'81**, p. 81], on voit que $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense par rapport à la topologie de Mackey $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.
Finalement, nous allons montrer la densité de $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ sous l'hypothèse de la quasi-complétitude de $(\mathcal{X}, \beta)$. Comme nous avons vu, $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense dans $(\mathcal{Y}, \tau(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$. Compte tenu du théorème 4.3.2, la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ est plus faible que la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Par conséquent $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ est dense dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$. ∎

4.4 Générateurs essentiels, le problème de Cauchy et le problème de Cauchy dual

Compte tenu des résultats obtenus de Arendt [**Ar'86**], Eberle [**Eb'97**] et Wu [**Wu'98**], Wu et Zhang introduisent dans [**WZ'06**] la notion de générateur essentiel sur $(\mathcal{X}, \beta)$ qui est très importante dans la suite.
Soit $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur linéaire ayant le domaine $\mathcal{D}$ dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$.

Définition 4.4.1 *On dit que A est un pré-générateur sur $(\mathcal{X}, \beta)$ s'il existe un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{X}, \beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ est une extension de A.*

Définition 4.4.2 *On dit que A est un générateur essentiel sur $(\mathcal{X}, \beta)$ (ou $(\mathcal{X}, \beta)$-unique) si A est un opérateur pré-fermé et sa fermeture $\overline{A}$ par rapport à la topologie β est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{X}, \beta)$.*

Un autre résultat important de cette thèse présente une caractérisation complète des générateurs essentiels sur des espaces localement convexes (voir [**WZ'06**], [**LW'06**]) et montre que la $(\mathcal{X},\beta)$-unicité introduite dans la définition 4.4.2 est une notion très naturelle.

Théorème 4.4.3 *Soient $(\mathcal{X},\beta)$ un espace localement convexe séparé séquentiellement complet, $\mathcal{Y}$ le dual topologique de $(\mathcal{X},\beta)$ et A un opérateur dans $\mathcal{X}$ avec le domaine $\mathcal{D}$ dense dans $(\mathcal{X},\beta)$. Supposons qu'il existe un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{X},\beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ est une extension de A (hypothèse d'existence du pré-générateur). Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
(i) A est un générateur essentiel sur $(\mathcal{X},\beta)$ (ou $(\mathcal{X},\beta)$-unique);
(ii) la fermeture de A dans $(\mathcal{X},\beta)$ est exactement $\mathcal{L}$ (donc $\mathcal{D}$ est un core pour $\mathcal{L}$);
(iii) $A^* = \mathcal{L}^*$ qui est le générateur du C_0-semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$;
(iv) pour $\lambda > \omega$, l'image $(\lambda I - A)(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{X},\beta)$;
(v) (propriété de Liouville) pour tout $\lambda > \omega_0$, $\mathcal{K}er\,(\lambda I - A^*) = \{0\}$ (c'est-à-dire, si $y \in \mathcal{D}(A^*)$ satisfait l'égalité $(\lambda I - A^*)y = 0$, alors $y = 0$);
(vi) (unicité des solutions pour l'équation de la résolvante) pour tout $\lambda > \omega_0$ et tout $y \in \mathcal{Y}$, l'équation de la résolvante de A^*

$$(\lambda I - A^*)z = y$$

a une solution unique $z = ((\lambda I - A)^{-1})^* y$;
(vii) (unicité des solutions fortes pour le problème de Cauchy) pour tout $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$, le problème de Cauchy (ou l'équation de Kolmogorov rétrograde)

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \overline{A} v(t) \\ v(0) = x \end{cases}$$

a une $(\mathcal{X},\beta)$-unique solution forte $v(t) = T(t)x$. Plus précisément, il existe une seule fonction dérivable

$$\mathbb{R}^+ \ni t \longmapsto v(t) = T(t)x \in (\mathcal{X},\beta)$$

dont la dérivée coïncide avec $\overline{A}v(t)$;
(viii) (unicité des solutions faibles pour le problème de Cauchy dual) pour tout $y \in \mathcal{Y}$, le problème de Cauchy dual (ou l'équation de Kolmogorov progressive)

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A^* u(t) \\ u(0) = y \end{cases}$$

a une $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$-unique solution faible $u(t) = T^*(t)y$. Plus précisément, il existe une seule fonction continue

$$\mathbb{R}^+ \ni t \longmapsto u(t) = T^*(t)y \in (\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$$

telle que

$$\langle x, u(t) - y \rangle = \int_0^t \langle Ax, u(s) \rangle \, dx \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D};$$

(ix) il existe un unique C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{X}, \beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ étend A;
(x) il existe un unique C_0-semi-groupe $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ dont le générateur $\mathcal{L}^*$ est contenu dans A^*.

Preuve. (i)⇒(iv) De (i) il résulte que $\overline{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\{T'(t)\}_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{X}, \beta)$. Soit $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $\left\{e^{-\lambda' t} T'(t)\right\}$ soit équicontinue. Alors il est bien connu que pour tout $\lambda > \lambda'$, la résolvante $R(\lambda; \overline{A})$ est continue sur $(\mathcal{X}, \beta)$. En particulier $R(\lambda; \overline{A})\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{Y}$. D'où on voit que $(\lambda I - A)(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$.
(iv)⇒(iii) En appliquant (iv) et le théorème de Hahn-Banach, on obtient que $\mathcal{K}er\ (\lambda I - A^*) = \{0\}$. De l'hypothèse d'existence $A \subset \mathcal{L}$, il résulte $\mathcal{L}^* \subset A^*$. Donc $\lambda I - A^*$ est un opérateur injectif qui étend l'opérateur $\lambda I - \mathcal{L}^*$. Avec [**Yo'71**, Proposition 2, p.273] on voit que $R(\lambda; \mathcal{L}^*) = R(\lambda; \mathcal{L})^*$. Par conséquent

$$\lambda I - \mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) \longrightarrow \mathcal{Y}$$

est un opérateur bijectif. Donc $\lambda I - A^* = \lambda I - \mathcal{L}^*$, d'où on obtient (iii).
(iii)⇒(ii) Comme $A \subset \mathcal{L}$ est un opérateur pré-fermé et $\mathcal{L}$ est un opérateur fermé, avec [**Sc'71**, Theorem 7.1, p.155] on déduit que $\overline{A} = A^{**} = \mathcal{L}^{**} = \mathcal{L}$.
(ii)⇒(i) Évidente.
(iii)⇒(vi) Cette implication est immédiate puisque

$$R(\lambda; A^*) = R(\lambda; \mathcal{L}^*) = R(\lambda; \mathcal{L})^*$$

existe et est continue sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$.
(vi)⇒(v) Évidente.

(v)⇒(iv) Cette implication est une conséquence du théorème de Hahn-Banach.

(ii)⇒(vii) Seule l'unicité doit être prouvée. Soit v une solution forte du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \overline{A}v(t) \\ v(0) = x \end{cases}$$

où $x \in \mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{L})$, compte tenu de (ii). Soit $a > 0$ arbitrairement fixé et définissons la fonction

$$h : [0, a] \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$h(t) := T(a-t)v(t) \quad .$$

Il est évident que h est une fonction continue sur $[0, a]$. En appliquant la propriété de C_0-semi-groupe de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, pour tout $t \in (0, a)$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}h(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{h(t+\varepsilon) - h(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{T(a-t-\varepsilon)v(t+\varepsilon) - T(a-t)v(t)}{\varepsilon} = \\ = \; & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{T(a-t-\varepsilon)v(t+\varepsilon) + T(a-t-\varepsilon)v(t) - T(a-t-\varepsilon)v(t) - T(a-t)v(t)}{\varepsilon} = \\ = \; & -T(a-t)\mathcal{L}v(t) + T(a-t)\overline{A}v(t) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$v(a) = h(a) = h(0) = T(a)x$$

d'où on obtient (vi).

(vii)⇒(ii) Comme $\overline{A} \subset \mathcal{L}$, pour tout $x \in \mathcal{D}(\overline{A})$ la solution forte v du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \overline{A}v(t) \\ v(0) = x \end{cases}$$

est une solution forte du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v(t) = \mathcal{L}v(t) \\ v(0) = x \end{cases}$$

Donc $v(t) = T(t)x \in \mathcal{D}(\overline{A})$. Il en résulte que $\mathcal{D}(\overline{A})$ est invariant par rapport à $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et comme $\mathcal{D}(\overline{A})$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$, avec la proposition 4.2.2 on en déduit que $\mathcal{D}(\overline{A})$ est un core de $\mathcal{L}$.

(viii)⇒(v) Supposons qu'il existe un $y_0 \neq 0$ tel que $(\lambda I - A^*)y_0 = 0$ pour $\lambda > \omega_0$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$T^*(t)y_0 - e^{-\lambda t}y_0 \neq 0$$

puisque, dans le cas contraire, la dérivée

$$\frac{d}{dt}T^*(t)y_0\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{\lambda t}y_0\bigg|_{t=0} = \lambda y_0$$

existerait dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ et avec le théorème 4.3.5 il résulterait que $y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*)$ et $(\lambda I - \mathcal{L}^*)y_0 = 0$, c'est-à-dire $y_0 = 0$ ce qui serait contradictoire.

On peut vérifier facilement que $T^*(T)y_0 - e^{\lambda t}y_0$ est une solution faible non nulle du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A^* u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui contredit (viii).

(ii)⇒(viii) Nous suivrons de près la preuve de Wu [**Wu'98**, Theorem 6.2, p.308]. Il est suffisant de montrer que chaque solution faible $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$-continue u du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = A^* u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

est nulle pour tout $t = a > 0$.

Pour le prouver, on fixe $a > 0$ et $x \in \mathcal{D}$. Définissons l'application

$$h(t) := \langle x, T^*(t)u(a-t)\rangle = \langle T(t)x, u(a-t)\rangle \quad .$$

Prouvons que $h(0) = h(a)$. Tout d'abord, on voit que l'application h est continue sur $[0, a]$ puisque l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue, l'ensemble $\{T(t)x \mid t \in [0, a]\}$ est compact dans $(\mathcal{X}, \beta)$ et l'application $[0, a] \ni u \mapsto u(a-t) \in (\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$ est continue. Pour tout $t \in (0, a)$ calculons

$$h'_+(t) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{h(t+\varepsilon) - h(t)}{\varepsilon} \quad .$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} h(t+\varepsilon)-h(t) &= \langle T(t+\varepsilon)x, u(a-t-\varepsilon)\rangle - \langle T(t)x, u(a-t)\rangle = \\ = \ & \langle T(t+\varepsilon)x, u(a-t-\varepsilon)\rangle - \langle T(t)x, u(a-t\varepsilon)\rangle + \\ + \ & \langle T(t)x, u(a-t\varepsilon)\rangle - \langle T(t)x, u(a-t)\rangle = \\ = \ & \langle (T(t+\varepsilon)-T(t))\, x, u(a-t-\varepsilon)\rangle + \langle T(t)x, u(a-t-\varepsilon)-u(a-t)\rangle \quad . \end{aligned}$$

Puisque $x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$, il vient $T(t)x \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Donc pour tout $\varepsilon \searrow 0$, on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(T(t+\varepsilon)-T(t))\, x \longrightarrow Ax = \mathcal{L}x$$

dans $(\mathcal{X}, \beta)$. Par conséquent, l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{\varepsilon}\,(T(t+\varepsilon)-T(t))\, x \;\middle|\; o < \varepsilon \leq a-t \right\} \cup \{Ax\}$$

est compact dans $(\mathcal{X}, \beta)$. Comme l'application $t \mapsto u(t)$ est continue par rapport à la topologie $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\, \langle (T(t+\varepsilon)-T(t))\, x, u(a-t-\varepsilon)\rangle = \langle \mathcal{L}T(t)x, u(a-t)\rangle \quad .$$

Pour calculer le deuxième terme, nous utiliserons le résultat clef suivant [**Wu'98**, p.309]:

$$\langle z, u(t)\rangle = \int_0^t \langle \mathcal{L}z, u(s)\rangle\, ds \quad , \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ t \geq 0.$$

La preuve de cette égalité utilise de façon essentielle la propriété (ii): $\mathcal{L}$ est la fermerture de A dans $(\mathcal{X}, \beta)$. Donc pour tout $z \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, on peut choisir une suite $z_n \in \mathcal{D}$, $n \in I\!N$, telle que

$$z_n \longrightarrow x$$

et

$$Az_n \longrightarrow \mathcal{L}z$$

dans $(\mathcal{X}, \beta)$. De l'égalité

$$\langle z_n, u(t)\rangle = \int_0^t \langle Az_n, u(s)\rangle\, ds$$

en utilisant le théorème de la convergence dominée on obtient le résultat clef. En appliquant ce résultat pour $z = T(t)x$, on voit que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \langle T(t)x, u(a-t-\varepsilon) - u(a-t) \rangle = \\
= \ & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\langle T(t)x, u(a-t-\varepsilon) \rangle - \langle T(t)x, u(a-t) \rangle \right] = \\
= \ & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^{a-t-\varepsilon} \langle \mathcal{L}T(t)x, u(s) \rangle \, ds - \int_0^{a-t} \langle \mathcal{L}T(t)x, u(s) \rangle \, ds \right] = \\
= \ & -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-t-\varepsilon}^{a-t} \langle \mathcal{L}T(t)x, u(s) \rangle \, ds = - \langle \mathcal{L}T(t)x, u(a-t) \rangle \quad .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$h'_+(t) = 0 \quad , \quad \forall t \in (0, a).$$

En utilisant un résultat classique de Dini [**Yo'71**, Lemma, p.239], il résulte que $h(a) = h(0)$ d'où il vient

$$\langle x, u(a) \rangle = \langle x, T^*(t)u(0) \rangle = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$, il s'ensuit que $u(a) = 0$.
(i)⇒(ix) Soit $\mathcal{L}'$ une autre extension de A tel que $\mathcal{L}'$ soit le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{X}, \beta)$. Alors, compte tenu de (ii), il en résulte que $\mathcal{L}' = \overline{A} = \mathcal{L}$.
(ix)⇒(i) Supposons qu'il existe un unique C_0-semi-groupe sur $\mathcal{X}$ tel que son générateur étend A. Avec le théorème 4.2.5 il s'ensuit que $\mathcal{D}$ est un core pour $\mathcal{L}$. Donc $\overline{\mathcal{L}/_{\mathcal{D}}} = \mathcal{L}$. Mais $A = \mathcal{L}/_{\mathcal{D}}$. De l'équivalence (i)⇔(ii), nous obtenons que $\mathcal{A}$ est un générateur essentiel sur $\mathcal{X}$.
(ix)⇔(x) Évidente. ∎

Remarque 4.4.4 Si A est un opérateur de diffusion, alors les solutions faibles pour le problème de Cauchy dual dans le théorème 4.4.3 (viii) correspondent exactement aux solutions au sens des distributions dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Il faut remarquer l'équivalence importante entre $(\mathcal{X}, \beta)$-unicité de l'opérateur A, $(\mathcal{X}, \beta)$-unicité de la solution forte pour le problème de Cauchy et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}))$-unicité de la solution faible pour le problème de Cauchy dual associé à l'opérateur A.

Remarque 4.4.5 Les résultats du théorème précédent sont bien connus dans le cas des espaces de Banach (voir [**Ar'86**], [**Pa'83-1**], [**Da'80**], [**Wu'98**], etc.). Mais il faut remarquer que seule l'unicité de solution forte a été étudiée systématiquement dans la théorie des C_0-semi-groupes. Il est aussi important de mentionner la subtilité du problème d'unicité: en l'absence d'hypothèse d'existence du pré-générateur dans le théorème précédent, même dans le cas des espaces de Banach, l'existence et l'unicité de la solution forte ne sont pas suffisantes pour la propriété du générateur essentiel de (i) (voir [**Ar'86**]).

Remarque 4.4.6 Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{Y};\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$ tel que son générateur B soit contenu dans $\mathcal{A}^*$ (c'est-à-dire $B \subset \mathcal{A}^*$, où la restriction de $\mathcal{A}^*$ au domaine $\mathcal{D}(B)$ coïncide avec B) on dit que $\mathcal{D}(B)$ est une condition à la frontière pour $\mathcal{A}^*$ (en accord avec FELLER [**Fe'52**, p.473]). Si $u(t)$ est une solution faible $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$-continue pour l'équation duale telle que la condition à la frontière $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ soit satisfaite, alors $u(t) = S(t)u(0)$. Dans la terminologie de Feller la propriété (x) du théoréme 4.4.3 est équivalente à:
(x') il existe une seule condition à la frontière pour $\mathcal{A}^*$.

Chapitre 5

Applications

Soit E un espace polonais doté d'une mesure σ-finie μ sur sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. D'abord, il faut remarquer que la topologie naturelle pour l'étude des C_0-semi-groupes sur $L^\infty(E,\mu)$ est *la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensemble compact de* $L^1(E,\mu)$, désignée par $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$. Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^1(E,\mu)$ ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}$, alors $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}^*$. De plus, on peut prouver que $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ est un espace complet et que le dual topologique de l'espace $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ est $(L^1, \|\,.\,\|_1)$. Dans la suite nous étudierons l'unicité pour certains opérateurs différentiels sur $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Une très intéresante synthése sur les méthodes probabilistes pour les équations de la physique est donnée dans [**DCLLPS'89**].

5.1 $L^\infty\left(\mathbb{R}^d, dx\right)$-unicité de l'opérateur de Laplace

Pour l'opérateur de Laplace (ou l'opérateur de Schrödinger libre)

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

qui agit sur l'espace $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ des fonctions réelles indéfiniment dérivables avec un support compact, il est bien connu (voir [**BH'86**, p. 7]) que pour tout $1 \leq p < \infty$, l'opérateur $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est contenu dans le générateur $\mathcal{L}_{(p)}$ du C_0-semi-groupe du mouvement brownien $\{P_t\}_{t\geq 0}$

$$P_t(x) = I\!E^x f\left(B_t\right)$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est le mouvement brownien standard définit sur l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (I\!P_x)_{x\in I\!R^d}\right)$ avec $I\!P_x\left(B_0 = x\right) = 1$ quel que soit le point initial $x \in I\!R^d$, et $I\!E^x$ est l'espérance par rapport à $I\!P_x$. On peut formuler

Théorème 5.1.1 *L'opérateur de Laplace $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est un pré-générateur dans $\left(L^\infty, \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$.*

Preuve. Soit $\{P_t\}_{t\geq 0}$ le C_0-semi-groupe du mouvement brownien sur $L^1\left(I\!R^d, dx\right)$. Avec le théorème 4.3.5 il en résulte que le semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geq 0}$ appartient à la classe C_0 sur $\left(L^\infty, \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$ et que son générateur $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(\infty)}$ est exactement l'adjoint $\mathcal{L}^*_{(1)}$ du générateur $\mathcal{L}_{(1)}$ du semi-groupe du mouvement brownien $\{P_t\}_{t\geq 0}$ sur $L^1\left(I\!R^d, dx\right)$. Puisque $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est contenu dans le générateur $\mathcal{L}_{(1)}$ et comme pour tout $f \in C_0^\infty\left(I\!R^d\right)$ on a $\Delta^* f = \Delta f$, nous obtenons que $\tilde{\mathcal{L}}_{(\infty)}$ est une extension de $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$. Par conséquent, l'opérateur de Laplace $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est un pré-générateur dans $\left(L^\infty, \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$. ■

Une première application importante des résultats obtenus dans le chapitre précédent se réfère au fait que l'opérateur de Laplace est un générateur essentiel sur $L^\infty\left(I\!R^d, dx\right)$.

Théorème 5.1.2 *L'opérateur de Laplace $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est $L^\infty\left(I\!R^d, dx\right)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)$.*

Preuve. Compte tenu du théorème 5.1.1, il en résulte que $\left(\Delta, C_0^\infty\left(I\!R^d\right)\right)$ est un pré-générateur sur $\left(L^\infty, \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$. Par conséquent, l'hypothèse de l'existence du pré-générateur dans le théorème 4.4.3 est satisfaite.

Soit $h \in L^1\left(I\!R^d, dx\right)$ tel que $(\Delta - 1)h = 0$ au sens des distributions. En appliquant le lemme de Weil, on voit que $h \in C_0^\infty\left(I\!R^d\right)$. De plus, de l'inégalité de Kato [**CHADP'87**, p.185], il vient

$$\Delta|h| \geq \text{sgn}\ (h) = |h| \geq 0$$

au sens des distributions. Par conséquent $|h|$ est une fonction sous-harmonique non-négative et avec le théorème de Liouville il s'ensuit que $|h| = 0$. Il en résulte que la propriété (v) du théorème 4.4.3 est vérifiée d'où l'on obtient que Δ est $L^\infty\left(\mathbb{R}^d, dx\right)$-unique. ■

5.2 $L^\infty(M,dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète

Soit M une variété riemannienne complète avec la messure dx. Désignons par Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami avec le domaine $C_0^\infty(M)$. $L^p(M,dx)$-unicité du C_0-semi-groupe engendré par $(\Delta, C_0^\infty(M))$ a été prouvée par Strichartz [**St'83**] pour $1 < p < \infty$, par Davies [**Da'85**] pour $p = 1$ et par Li [**Li'84**] pour $p = \infty$.
En fait, Li [**Li'84**] prouve que si M a une géometrie bornée, alors M satisfait le théorème de Liouville: s'il existe un point fixe $0 \in M$ et une constante $C > 0$ telles que la courbure de Ricci (voir [**GHL'90**, Definition 3.18, p. 111]) satisfait l'inégalité

$$Ric(x) \geq -C\left(1 + d(x,0)^2\right) \quad , \quad \forall x \in M$$

où $d(x,0)$ désigne la distance de x à o, alors tout les fonctions non-negative L^1-integrable sous-harmoniques sont constantes. Dans la même condition, Li a prouvé que pour tout $h \in L^1(M,dx)$, l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \Delta u(t) \\ u(0) = h \end{cases}$$

a une solution faible $L^1(M,dx)$-unique.
Considérons maintenant l'opérateur de Schrödinger $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$

$$\mathcal{A} = \frac{\Delta}{2} - V$$

où $V \geq 0$. Dans ce cas, on a le théorème suivant (voir [**Le'06**])

Théorème 5.2.1 *Soit M une variété riemannienne pour laquelle il existe un point fixe $0 \in M$ et une constante $C > 0$ telles que*

$$Ric(x) \geq -C\left(1 + d(x,0)^2\right) \quad , \quad \forall x \in M$$

où $d(x,0)$ désigne la distance de x à o. Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M,dx)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.

Preuve. Prouvons le théorème en deux étapes.
Etape 1 $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est un pré-générator sur $(L^\infty(M,dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien à valeurs dans l'espace $M \cup \partial$ définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0})$ avec $I\!\!P_x(B_0 = x) = 1$ pour tout point initial $x \in M$. Désignons par

$$\tau_e = \inf\{t \geq 0 \ | B_t = \partial\}$$

le temps d'explosion. Considérons le semi-groupe de Feynman-Kac

$$P_t^V f(x) = I\!\!E^x 1_{[t<\tau_e]} f(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \quad .$$

Puisque $\left\{P_t^V\right\}_{t\geq 0}$est un C_0-semi-groupe sur $L^1(M,dx)$, il est aussi un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(M,dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$. Avec la formule de Itô (voir [**SV'79**, Theorem 4.4.1, p. 104]), pour tout $f \in C_0^\infty(M)$ il s'ensuit que

$$f(B_t)e^{-\int_0^t V(B_s)ds} - f(B_0) - \int_0^t \left(\frac{\Delta}{2} - V\right) f(B_s) e^{-\int_0^s V(B_r)dr} ds$$

est une martingale locale. Comme elle est bornée sur les intervales bornés, c'est une vraie martingale. En prenant l'espérance par rapport à $I\!\!P_x$ dans la dernière formule, on trouve que

$$P_t^V f(x) - f(x) = \int_0^t P_s^V \left(\frac{\Delta}{2} - V\right) f(x) ds \quad , \quad \forall t \geq 0$$

qui signifie que f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}^V$ de $\left\{P_t^V\right\}_{t\geq 0}$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_{(\infty)}^V$ étend $\mathcal{A}$.

Etape 2 $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $(L^\infty(M,dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique.
Avec le théorème 4.4.3, il s'ensuit que l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M,dx)$-unique si et seulement si pour $\lambda > \omega$, l'image $(\lambda I - \mathcal{A})(C_0^\infty(M))$ est dense dans $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Il est suffisant de prouver que si $h \in L^1(M,dx)$ satisfait $(\lambda I - \mathcal{A})h = 0$ au sens des distributions, alors $h = 0$.
Soit $h \in L^1(M,dx)$ tel que pour $\lambda > \omega$ on a

$$(\lambda I - \mathcal{A})h = 0$$

au sens des distributions. Alors, avec l'inégalité de Kato, nous avons

$$\Delta|h| \geq sgn(h)\Delta h = 2sgn(h)(\lambda + V)(h) = 2(\lambda + V)|h| \geq 0 \quad .$$

Alors $|h|$ est une fonction sous-harmonique. Avec [**Li'84**, Theorem 1, p. 447] on voit que $|h|$ est constante, donc h est constante. Par conséquent $h = 0$. ∎

Corollaire 5.2.2 *Soit M une variété riemannienne pour laquelle il existe un point fixe $0 \in M$ et une constante $C > 0$ telles que*

$$Ric(x) \geq -C\left(1 + d(x,0)^2\right) \quad , \quad \forall x \in M$$

où $d(x,0)$ désigne la distance de x à o, alors pour tout $h \in L^1(M,dx)$, l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \left(\frac{\Delta}{2} - V\right) u(t) \\ u(0) = h \end{cases}$$

a une $L^1(M,dx)$-unique solution faible.

Preuve. Avec le théorème 4.4.3, $L^1(M,dx)$-unicité de la solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \left(\frac{\Delta}{2} - V\right) u(t) \\ u(0) = h \end{cases}$$

est équivalente avec $(L^\infty(M,dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unicité de l'opérateur de Schrödinger $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ qui résulte compte tenu du théorème 5.2.1. ∎

5.3 $L^\infty(D, dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger

Soit D un domaine ouvert de $I\!R^d$ avec la frontière ∂D. Désignerons par $C_0^\infty(D)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur D avec un support compact. Dans la suite nous considérons l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{A} = -\frac{\Delta}{2} + V$ ayant le domaine $C_0^\infty(D)$, où Δ est l'opérateur de Laplace et $V : I\!R^d \longrightarrow I\!R$ est un potentiel mesurable Borel. Comme nous avons précisé, l'opérateur de Laplace Δ engendre un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ dans $I\!R^d$ défini sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (I\!P_x)_{x\in I\!R^d}\right)$ avec $I\!P_x(B_0 = x) = 1$ pour tout point initial $x \in I\!R^d$. La propriété essentiellement auto-adjointe de l'opérateur de Schrödinger dans l'espace $L^2(D, dx)$, équivalente à l'unique solvabilité de l'équation de Schrödinger dans $L^2(D, dx)$, a été étudiée par Kato [**Ka'84**], [**Ka'72**], Reed and Simon [**RS'75**], Simon [**Si'82**] et autres à la cause de sa importance dans la mécanique quantique. Partant d'une interprétation probabiliste intuitive de l'unicité, Wu [**Wu'98**] a introduit et a étudié l'unicité de l'opérateur de Schrödinger dans l'espace $L^1(D, dx)$ et, plus tard, dans $L^p\left(I\!R^d, dx\right)$, pour $p \in (1, \infty)$ (voir [**Wu'01**]). En fait, pour avoir la $L^1(D, dx)$-unicité, intuitivement le potentiel repulsif V^+ devrais être infini dans la proximité de la frontière ∂D tel que la particule avec le point de départ à l'intérieur de D ne peut pas arriver sur la frontière ∂D (voir [**Wu'98**, Theorem 1.1, p. 279]).

Le but principal de cette section est l'étude de $L^\infty(D, dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$. Le résultat suivant est bien connu :

Théorème 5.3.1 *Soit $V \geq 0$. Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ est $L^\infty(D, dx)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.*

Preuve. Pour prouver $(L^\infty(D, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unicité de l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ on peut utiliser la preuve de Wu et Zhang [**WZ'02**, Theorem 5, p. 704]. Soit $h \in L^1(I\!R^d, dx)$ tel que pour $\lambda > \omega$ on a

$$\left(\lambda I - \frac{\Delta}{2} + V\right) h = 0$$

au sens des distributions. En utilisant l'inégalité de Kato, on a:

$$\Delta|h| \geq sgn(h)\Delta h = 2sgn(h)(\lambda + V)(h) = 2(\lambda + V)|h| \geq 0$$

au sens de la distribution. Donc $|h|$ est une fonction sous-harmonique non-negative et avec le théorème de Liouville on obtient $|h| = 0$. Avec le théorème 4.4.3 il s'ensuit que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ est $(L^\infty(D,dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique. ■

Dans le cas lequel V est borné, il est simple de prouver que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ est $L^\infty(D,dx)$-unique. Mais presque dans toutes les situations intéressantes de la physique quantique, le potentiel V est non borné. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer un potentiel appartenant à la *classe de Kato*, utilisée pour la première fois par SCHECHTER [**Sch'71**] et KATO [**Ka'72**].

Définition 5.3.2 *On dit que une fonction mesurable V appartient à la classe de Kato $\mathcal{K}^d$ sur $I\!R^d$ si*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sup_{x \in I\!R^d} \int\limits_{|x-y| \le \delta} |g(x-y)V(y)|\, dy = 0$$

où

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{d-2}} & , \quad \textit{if } d \ge 3 \\ \ln \frac{1}{|x|} & , \quad \textit{if } d = 2 \\ 1 & , \quad \textit{if } d = 1. \end{cases}$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$ définissons

$$\left\| P_t^{D,V} \right\|_p := \sup_{\substack{f \ge 0 \\ \|f\|_\infty \le 1}} \left\| P_t^{D,V} f \right\|_p \quad .$$

Les propriétés suivantes du semi-groupe de Feynman-Kac prouvées par ALBEVERIO et MA [**AM'91**, Theorem 4.1, p. 343] seront trés utiles.

Lemme 5.3.3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) $\left\| P_t^{D,V} \right\|_2 < \infty$*;*
(ii) $\left\{ P_t^{D,V} \right\}_{t \ge 0}$ *est un C_0-semi-groupe sur $L^2(D,dx)$;*
(iii) la forme quadratique

$$\mathcal{E}^V(f,g) := \int \nabla f \cdot \nabla g\, dx + \int V f g\, dx \quad , \quad \forall f, g \in C_0^\infty(D)$$

associée à $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ est inferieurement bornée, c'est à dire,

$$\lambda(D,V) := \inf \left\{ \mathcal{E}^V(f,f) \middle| \; \|f\|_2 \le 1 \right\} > -\infty \quad .$$

Dans ce cas, on a

$$\left\|P_t^{D,V}\right\|_2 = e^{-\lambda(D,V)t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

La preuve du lemme suivant est analogue à la preuve de [**Wu'98**, Lemma 2.3, p. 288].

Lemme 5.3.4 *Soit* $V \in L^\infty_{loc}(D, dx)$ *et soit* $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ *le semi-groupe de Feynman-Kac sur* $L^\infty(D, dx)$*. Si* $\left\|P_t^{D,V}\right\|_\infty$ *est borné sur les intervalles compacts, alors* $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe sur* $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ *et son générateur* $\mathcal{L}^{D,V}_{(\infty)}$ *est une extension de l'opérateur* $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$*.*

Preuve. Soit $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Feynman-Kac sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$. Puisque $\left\|P_t^{D,V}\right\|_1 = \left\|P_t^{D,V}\right\|_\infty$ est borné pour t dans les intervalles compacts de $[0, \infty)$, avec [**Wu'01**, Lemma 2.3, p. 59] il s'ensuit que $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. Compte tenu du théorème 4.3.5 on obtient que $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$. Il faut prouver que son générateur $\mathcal{L}^{D,V}_{(\infty)}$ est une extension de $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$.

Soit $V \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons $V_n := V \wedge n$. Avec un théorème de perturbation bornée (voir [**Da'80**, Theorem 3.1, p. 68]) il s'ensuit que

$$\mathcal{A}_n = -\frac{\Delta}{2} + V_n$$

est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\left\{P_t^{D,V_n}\right\}_{t\geq 0}$ sur $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Donc pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ on a

$$P_t^{D,V_n} f - f = \int_0^t P_s^{D,V_n} \mathcal{A}_n f \, ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

En possant $n \to \infty$, nous obtenons:

$$P_t^{D,V_n} f \to P_t^{D,V} f$$

et

$$P_t^{D,V_n} \mathcal{A}_n f \to P_t^{D,V} \mathcal{A} f \quad .$$

De plus, pour tout $x \in D$ nous avons:

$$\left|P_t^{D,V_n} f(x)\right| \leq P_t^{D,V} |f|(x)$$

et

$$\left|P_t^{D,V_n} \mathcal{A}_n f(x)\right| \leq P_t^{D,V} \left(\left| \frac{\Delta}{2} f \right| + |Vf| \right)(x) \quad .$$

Compte tenu du théorème de la convergence dominée, nous obtenons

$$P_t^{D,V} f - f = \int_0^t P_s^{D,V} \mathcal{A} f ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit que f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}^{D,V}$ du C_0-semi-groupe $\left\{ P_t^{D,V} \right\}_{t \geq 0}$.
Dans le cas général, soit $V^n = V \vee (-n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Compte tenu du cas $V \geq 0$, nous avons

$$P_t^{D,V^n} f - f = \int_0^t P_s^{D,V^n} \mathcal{A}^n f ds \quad , \quad t \geq 0.$$

Mais

$$\left|P_s^{D,V^n} \mathcal{A}^n f(x)\right| \leq P_s^{D,V} \left(\left| \frac{\Delta}{2} f \right| + |Vf| \right)(x)$$

et avec le théorème de Fubini nous obtenons

$$\int_0^t P_s^{D,V} \left(\left| \frac{\Delta}{2} f \right| + |Vf| \right)(x) ds < \infty$$

dx-p.p. sur D. D'autre part, pour tout $x \in D$ fixé tel que

$$P_s^{D,V} \left(\left| \frac{\Delta}{2} f \right| + |Vf| \right)(x) < \infty$$

avec le théorème de la convergence dominée on a

$$P_s^{D,V^n} \left(-\frac{\Delta}{2} + V^n \right) f(x) \longrightarrow P_s^{D,V} \left(-\frac{\Delta}{2} + V \right) f(x) \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^t P_s^{D,V^n} \left(-\frac{\Delta}{2} + V^n \right) f ds \to \int_0^t P_s^{D,V} \left(-\frac{\Delta}{2} + V \right) f ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

D'une manière analogue on peut prouver que

$$P_t^{D,V^n} f - f \to P_t^{D,V} f - f \quad .$$

Par conséquent

$$P_t^{D,V} f - f = \int_0^t P_s^{D,V} \left(-\frac{\Delta}{2} + V \right) f ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Donc f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}^{D,V}$ du C_0-semi-groupe $\left\{ P_t^{D,V} \right\}_{t \geq 0}$. Par conséquence $\mathcal{L}_{(\infty)}^{D,V}$ est une extension de l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$. ■

Le résultat le plus important de cette section est le théorème suivant.

Théorème 5.3.5 *Soit $V \in L_{loc}^\infty (D, dx)$ tel que $V^- \in \mathcal{K}^d$. Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty (D))$ est un générateur essentiel sur $L^\infty (D, dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.*

Preuve. D'abord il faut rémarquer que l'hypothèse d'existence dans le théorème 4.4.3 est satisfait. Vraiment, si nous considérons le semi-groupe de Feynman-Kac $\left\{ P_t^{D,V} \right\}_{t \geq 0}$ sur $L^\infty (D, dx)$, nous avons

$$\left| P_t^{D,V} f(x) \right| \leq P_t^{D,V} |f|(x) \leq P_t^{D,-V^-} |f|(x) \leq P_t^{-V^-} |f|(x)$$

d'où l'on déduit que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| P_t^{D,V} \right\|_\infty \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| P_t^{-V^-} \right\|_\infty < \infty$$

puisque $\left\| P_t^{-V^-} \right\|_\infty$ est uniformément borné compte tenu de l'appartenance $V^- \in \mathcal{K}^d$ et de [**AS'82**]. En utilisant le lemme 5.3.4 il s'ensuit que $\left\{ P_t^{D,V} \right\}_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ et son générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}^{D,V}$ est une extension de $(\mathcal{A}, C_0^\infty (D))$. Avec le théorème 4.4.3 (i)⇔(iv), on déduit que l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty (D))$ est $L^\infty (D, dx)$-unique si et seulement si pour $\lambda > \omega$, l'image $(\lambda I - \mathcal{A}) (C_0^\infty (D))$ est dense dans $(L^\infty, \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Il est suffisant de prouver que pour tout $h \in L^1 (D, dx)$ satisfaisant l'égalité

$$\langle h, (\lambda I - \mathcal{A}) f \rangle = 0 \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty (D)$$

pour $\lambda > \omega$, il résulte que $h = 0$.
Soit $h \in L^1(D,dx)$ tel que

$$\langle h, (I-\mathcal{A})f\rangle = 0 \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(D)$$

ou

$$(I-\mathcal{A})h = 0 \quad \text{au sens des distributions.}$$

Puisque $V \in L^\infty_{loc}(D,dx)$, compte tenu de [**AS'82**, Theorem 1.5, p. 217] on voit que h est une fonction continue. Avec [**AS'82**, Corollary 3.9, p. 231], on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|h(x)| \leq C \int\limits_{|x-y|\leq 1} |h(y)|\, dy \quad , \quad \forall x \in D.$$

Comme $V^- \in \mathcal{K}^d$, il s'ensuit que C peut être choisie indépendamment de $x \in D$. Puisque $h \in L^1(D,dx)$, on voit que h est bornée et, par conséquent, $h \in L^2(D,dx)$. Maintenant avec $L^2(D,dx)$-unicité de $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ et avec le théorème 4.4.3, on voit que h appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}^{D,V}_{(2)}$ de $\left\{P_t^{D,V}\right\}_{t\geq 0}$ sur L^2 et

$$\mathcal{L}^{D,V}_{(2)} h = \left(-\frac{\Delta}{2} + V\right) = -\lambda h \quad .$$

Donc

$$P_t^{D,V} h = e^{-\lambda t} h \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Si on prend $\lambda \in (\omega, \lambda(D,V))$, alors la dernière égalité est vraie seulement pour $h = 0$, parce que $\left\|P_t^{D,V}\right\|_2 = e^{-\lambda(D,V)t}$. ■

Remarque 5.3.6 Par analogie avec l'unicité dans $L^1(D,dx)$, $L^\infty(D,dx)$-unicité de $(\mathcal{A}, C_0^\infty(D))$ signifie que la particule ayant le départ sur la frontière ∂D ne peut pas entrer dans D.

Remarque 5.3.7 Malheureusement, ici nous avons un problème trés serieux: avec la remarque 4.4.6, $L^\infty(D,dx)$-unicité de $\mathcal{A}$ est équivalente avec l'existence d'une unique condition à la frontière pour $\mathcal{A}^*$. Il est bien connu qu'on a plusieurs conditions à la frontière (Dirichlet, Newmann, etc.). Mais dans le cas de $L^1(D, dx)$-unicité, l'effet de la frontière a été éliminé par une condition (C_1) dans [**Wu'98**, p. 277] sur le potentiel V. Trouver une condition analogue dans le cas de $L^\infty(D, dx)$-unicité est un problème trés difficile. D'autre part, dans [**WZ'06**] on peut trouver le résultat suivant:

Proposition 5.3.8 *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si l'opérateur de Laplace $(\Delta, C_0^\infty(D))$ est $L^\infty(D, dx)$-unique, alors $D^C = \emptyset$ ou $D = \mathbb{R}^d$.*

Preuve. Si, par contre, D^C est non-vide, alors on considère $x_0 \in D^C$. Le potentiel de Bessel

$$g(x - x_0) = \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4t}\right)} dt$$

est une fonction L^1-integrable $(\Delta - 1)$-harmonique sur $\mathbb{R}^d - \{x_0\}$, donc sur D. Avec le théorème 4.4.3, il résulte que $(\Delta, C_0^\infty(D))$ n'est pas unique dans L^∞ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. ■

Nous finissons avec l'unicité des solutions faibles du problème de Cauchy dual:

Corollaire 5.3.9 *Si $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d, dx)$ et $V^- \in \mathcal{K}^d$, alors pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, l'équation de diffusion de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \left(\frac{\Delta}{2} - V\right) u(t) \\ u(0) = h \end{cases}$$

a une $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$-unique solution faible donnée par $u(t) = P_t^V h$.

Preuve. L'affirmation résulte avec le théorème 4.4.3 et le théorème 5.3.5. ■

5.4 $L^1(I\!R^d, dx)$-unicité des solutions faibles pour l'équation de transport de masse

Les résultats de cette section peuvent-être trouvés dans [**LW'06**]. On considère l'opérateur

$$\mathcal{A}f = b\nabla f \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty\left(I\!R^d\right)$$

où le champ vectoriel $b : I\!R^d \to I\!R^d$ est localement lipschitzien. Soit ∂ le point à infini de $I\!R^d$. Considèrons l'équation

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt \\ X(0) = x \end{cases} \quad .$$

Pour tout $x \in I\!R^d$, il existe une unique solution $(X_t(x))_{0 \leq t < \tau_e}$, où

$$\tau_e = \inf\left\{t \geq 0 \mid X_t = \partial\right\}$$

est le temps d'explosion. Alors la famille $\{P_t\}_{t \geq 0}$, où

$$P_t f(x) = f(X_t(x))1_{[t<\tau_e]}$$

est un C_0-semi-groupe sur $L^\infty\left(I\!R^d, dx\right)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)$ et

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t b\nabla f(X_s)ds \quad , \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^d).$$

Par conséquent f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}$ du C_0-semi-groupe $\{P_t\}_{t\geq 0}$ sur $L^\infty\left(I\!R^d, dx\right)$ et

$$\mathcal{L}_{(\infty)}f = \mathcal{A}f = b\nabla f \quad .$$

Il s'ensuit donc que $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R^d)\right)$ est un pré-générateur sur $\left(L^\infty\left(I\!R^d, dx\right), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$. Alors on peut étudie $\left(L^\infty\left(I\!R^d, dx\right), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$-unicité de l'opérateur $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R^d)\right)$. Nous commençons avec l'opérateur uni-dimensionnel

$$\mathcal{A}f = bf' \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(I\!R)$$

où b est une fonction localement lipschitzienne sur $I\!R$ tel que $b(x) > 0$, pour tout $x \in I\!R$. Soit $\mathcal{A}^* : \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \subset L^1(I\!R, dx) \to L^1(I\!R, dx)$ l'adjoint de $\mathcal{A}$ et $h \in L^1(I\!R, dx)$ tel que $h \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ et

$$\mathcal{A}^* h = \lambda h \quad .$$

Alors h est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$-(bh)^{'} = \lambda h$$

au sens des distributions. Comme bh est absolument continue, il résulte que h est absolument continue sur l'ensemble $\{x \in I\!R \mid b(x) \neq 0\}$.

Théorème 5.4.1 *Supposons que b est localement lipschitzienne et $b(x) > 0$ sur $I\!R$. Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R))$ est $(L^\infty(I\!R, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{b(x)} dx = \infty \quad .$$

Preuve. Comme nous avons vu, $(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R))$ est un pré-générateur sur $(L^\infty(I\!R, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$.
$\Leftarrow$ Supposons, par contre, que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R))$ n'est pas $(L^\infty(I\!R, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique. Alors il existe une fonction $h \in L^1(I\!R, dx)$, $h \neq 0$ telle que

$$(I - \mathcal{A}^*) h = 0$$

au sens des distributions. On peut supposer que h est absolument continue. Alors h est une solution de l'équation

$$-(bh)^{'} = h \quad .$$

De l'égalité

$$h^{'} = -\frac{1 + b^{'}}{b} h \quad ,$$

il résulte que

$$h = h(0) e^{-\int_0^x \frac{1+b^{'}(s)}{b(s)} ds} = h(0) \frac{b(0)}{b(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{b(s)} ds}.$$

Puisque $h \neq 0$, on a $h(0) \neq 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx = |h(0)||b(0)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{b(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{b(s)} ds} dx$$

et pour

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{b(s)} ds$$

il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx = |h(0)||b(0)| \int_{u(-\infty)}^{u(\infty)} e^{-u} du = \infty$$

ce qui est contradictoire avec la supposition $h \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.
$\Rightarrow$ Si par contre

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{b(x)} dx < \infty \quad ,$$

alors

$$h(x) = \frac{b(0)}{b(x)} e^{-\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{b(x)} dx} \in L^1(\mathbb{R}, dx)$$

et

$$(I - \mathcal{A}^*)h = 0$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\mathcal{A}$ est $(L^\infty(\mathbb{R}, dx))$-unique. ■
On a maintenant

Théorème 5.4.2 *Soit b une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ tel que pour $c_0 < c_N \in \mathbb{R}$, $b1_{(-\infty,c_0]}$ et $b1_{[c_N,+\infty)}$ gardent le signe constant (non-nulle). Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ est $(L^\infty(\mathbb{R}, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{c_0} \frac{1}{b^+(x)} dx = \int_{c_N}^{+\infty} \frac{1}{b^-(x)} dx = +\infty.$$

Preuve. *Suffisance.* Supposons par contre que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R))$ n'est pas $(L^\infty(I\!R, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unique. Alors il existe une fonction $h \in L^1(I\!R, dx)$, $h \neq 0$ telle que

$$(I - \mathcal{A}^*)\, h = 0$$

au sens des distributions. Alors bh est absolument continue sur $I\!R$.
Puisque $b1_{(-\infty, c_0]}$ et $b1_{[c_N, +\infty)}$ garde le signe constant, on peut supposer que

$$\{x \in I\!R \mid b(x) = 0\} = \{x_1 < x_2 < ... < x_N\} \subset [c_0, c_N].$$

Etape 1. Soit $x \in I_k = (x_k, x_{k+1})$ et $c_k \in I_k$, $k \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Comme h est absolument continue sur I_k, on a

$$h(x) = h(c_k)\frac{b(c_k)}{b(x)} e^{-\int\limits_{c_k}^{x} \frac{1}{b(s)}\, ds} \quad , \quad \forall x \in I_k.$$

Puisque $h \neq 0$ sur I_k, nous avons

- si $b(x) > 0$ pour tout $x \in I_k$, alors

$$\lim_{x \searrow x_k} b(x)h(x) = b(c_k)h(c_k)e^{\int\limits_{x_k}^{c_k} \frac{1}{b(s)}\, ds} \text{ n'existe pas}$$

- si $b(x) < 0$ pour tout $x \in I_k$, alors

$$\lim_{x \nearrow x_{k+1}} b(x)h(x) = b(c_k)h(c_k)e^{-\int\limits_{c_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{b(s)}\, ds} \text{ n'existe pas}$$

ce qui est contradictoire avec notre supposition.
Etape 2. Soit $x \in (x_N, \infty)$. Alors

$$h(x) = h(c_N)\frac{b(c_N)}{b(x)} e^{-\int\limits_{c_N}^{x} \frac{1}{b(s)}\, ds} \quad ,$$

d'où il s'ensuit que

$$\int\limits_{x_N}^{+\infty} h(x)\, dx = h(c_N)b(c_N) \int\limits_{x_N}^{+\infty} \frac{1}{b(x)} e^{-\int\limits_{c_N}^{x} \frac{1}{b(s)}\, ds}\, dx.$$

Soit

$$u(x) = \int_{c_N}^{x} \frac{1}{b(s)}\, ds.$$

Puisque $h(c_N) \neq 0$, on a

- si $b(x) < 0$ sur $(x_N, +\infty)$, alors $u(+\infty) = -\infty$ et

$$\int_{x_N}^{\infty} h(x)\, dx = h(c_N)b(c_N) \int_{u(x_N)}^{u(\infty)} e^{-u}\, du = \infty \text{ ou } -\infty$$

- si $b(x) > 0$ pour tout $x \in (x_N, \infty)$, alors

$$\lim_{x \searrow x_N} b(x)h(x) = h(c_N)b(c_N)e^{\int_{x_N}^{c_N} \frac{1}{b(s)}\, ds} = \infty \text{ ou } -\infty$$

ce qui est aussi contradictoire avec notre supposition.

Etape 3. Le cas ou $x \in (-\infty, x_1)$ est similaire avec le cas précedent.

Neccesité. Nous supposons par contre que

$$\int_{c_N}^{+\infty} \frac{1}{b^-(x)}\, dx < \infty$$

Définisons

$$h(x) = \begin{cases} \frac{b(c_N)}{b(x)} e^{-\int_{c_N}^{x} \frac{1}{b(s)}\, ds} & , \quad x > x_N \\ 0 & , \quad x \leq x_N \end{cases}$$

Nous avons $-(bh)' = h$ sur $(-\infty, x_N)$ et (x_N, ∞). Puisque

$$\lim_{x \searrow x_N} b(x)h(x) = b(c_N)e^{\int_{x_N}^{c_N} \frac{1}{b(s)}\, ds} = 0,$$

la fonction h est une solution de l'équation $-(bh)' = h$ au sens des distributions, ce qui est contradictoire avec $(L^\infty(\mathbb{R}, dx))$-unicité de $\mathcal{A}$. ■

Dans le cas multidimensionnel $d \geq 2$, le résultat principal est le théorème suivant

Théorème 5.4.3 *Soit $b : I\!R^d \to I\!R^d$ une fonction de classe $C^1(I\!R^d)$ telle que $b(x) \neq 0$ pour tout $|x| \geq R$. Supposons qu'il existe une fonction mesurable localement bornée $\beta : I\!R^+ \to I\!R$ telle que*

$$\left(b(x)\frac{x}{|x|}\right)^- \leq \beta(|x|) \quad \forall |x| \geq R \quad .$$

Si

$$\int_R^\infty \frac{1}{\beta(x)} dx = \infty \quad ,$$

alors $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(I\!R^d)\right)$ est $\left(L^\infty\left(I\!R^d, dx\right), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$-unique. En particulier, pour tout $h \in L^1(I\!R^d, dx)$, l'équation de transport de masse

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = -div(b\rho(t,x)) \\ \rho(0,x) = h(x) \end{cases}$$

a une $L^1(I\!R^d, dx)$-unique solution faible.

Preuve. Pour tout $x \in I\!R^d$, soit $(X_t(x))_{0 \leq t < e}$, où e est le temps d'explosion, la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{dt} = b(X_t) \\ X(0) = x \end{cases} .$$

Alors la famille $\{P_t\}_{t \geq 0}$,

$$P_t(x) = f(X_t(x))$$

est un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(I\!R^d, dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.

Etape 1. Tout d'abord nous prouvons que pour tout $f \in C_0^1$, il existe $(f_n)_{n \in I\!N} \subset C_0^\infty(I\!R^d)$ tel que $f_n \to f$ et $\mathcal{A}f_n \to \mathcal{A}f$ par rapport à latopologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.

Vraiment, soit *suppf* $\subset B(0,N)$. Alors il existe $(f_n)_{n \in I\!N} \in \mathcal{C}_0^\infty(I\!R^d)$ tel que *supp* $f_n \subset B(0, N+1)$, pour tout $n \geq 1$, $f_n \to f$ et $\nabla f_n \to \nabla f$ uniformément sur $I\!R^d$. Alors

$$b\nabla f_n \to b\nabla f$$

uniformément sur $I\!R^d$.

Etape 2. Nous allons prouver maintenant que C_0^1 est un core pour $\mathcal{A}$. Compte tenu de [**WZ'06**, Lemma 2.4, p.572], il est suffisant de prouver que

$$P_t\mathcal{C}_0^1 \subset \mathcal{C}_0^1$$

ou, équivalent,

$$\lim_{|x|\to\infty} |X_t(x)| = \infty.$$

Considérons

$$\tau_n = \inf\{t \mid |X_t| = n\}$$

et

$$\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n = e.$$

Pour tout $t < \tau_R \wedge \tau_\infty$, nous avons

$$\frac{d|X_t(x)|}{dt} = \frac{X_t(x)}{|X_t(x)|} b(X_t(x)) \geq -\beta(|X_t(x)|).$$

Soit

$$h(x) = \int_R^x \frac{1}{\beta(s)}\, ds.$$

Alors on a

$$\frac{d}{dt} h(|X_t(x)|) = \frac{1}{\beta(|X_t(x)|)} \frac{X_t(x)}{|X_t(x)|} b(X_t(x)) \geq -1$$

d'où il s'ensuit que

$$h(|X_t(x)|) \geq h(|x|) - t \quad , \quad \forall t \in [0, \tau_R \wedge \tau_\infty).$$

Par conséquent

$$\lim_{|x|\to\infty} |X_t(x)| = \infty$$

d'où on déduit que $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ est $\left(L^\infty\left(\mathbb{R}^d, dx\right), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$-unique. ■

5.5 $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger généralisé

Dans cette section nous considérons l'opérateur de Schrödinger généralisé (ou l'opérateur de difussion de Nelson)

$$\mathcal{A}f := \frac{1}{2}\Delta f + b\nabla f \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

où $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ vectoriel mesurable et localement borné. L'étude de ces opérateurs a attiré beaucoup de mathématiciens travaillant dans la mécanique stochastique de Nelson (Carmona [**Ca'85**], Meyer et Zheng [**MZ'84**], etc.) et aussi dans la théorie des formes de Dirichlet (Albeverio, Brasche et Röckner [**ABR'89**]). L'auto-adjunction essentiel de $\mathcal{A}$ a été complétement caractérisé par Wielens [**Wi'85**] et Liskevitch [**Li'99**]. La L^1-unicité de cet opérateur a été étudiée par Wu [**Wu'99**] et sa L^p-unicité a été étudiée par Eberle [**Eb'97**] et Djellout [**Dj'97**] pour $p \in [1, \infty)$. Dans la suite nous présentons les résultats obtenus par Wu and Zhang [**WZ'06**] pour $p = \infty$.

On remarque que l'opérateur généralisé de Schrödinger $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ est un pré-générateur sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$. Vraiment, si nous considérons le semi-groupe de Feynman-Kac $\{P_t\}_{t\geq 0}$

$$P_t f(x) := \mathbb{E}^x 1_{[t<\tau_e]} f(X_t)$$

où $(X_t)_{0\leq t<\tau_e}$ est la diffusion éngendrée par $\mathcal{A}$ et τ_e est le temp d'explosion, alors avec [**WZ'06**, Theorem 1.4] $\{P_t\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$. Soit ∂ le point à l'infini de $\mathbb{R}^d$. Si on pose $X_t = \partial$ après le temps d'explosion $t \geq \tau_e$, alors avec la formule de Itô il résulte que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$f(X_t) - f(x) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)\, ds$$

est une martingale locale. Comme elle est bornée sur les intervalles bornés, c'est une vraie martingale. Alors en prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_x$, nous obtenons

$$P_t f(x) - f(x) = \int_0^t P_s \mathcal{A} f(x)\, ds \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}$ du C_0-semi-groupe $\{P_t\}_{t\geq 0}$ sur $(L^\infty(\mathbb{R}^d, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Donc $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ est un pré-générateur sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$.
Nous commençons avec l'étude de L^∞-unicité pour l'opérateur uni-dimensionnel

$$\mathcal{A}f = a(x)f'' + b(x)f'f \quad , \quad f \in C_0^\infty(x_0, y_0)$$

où $-\infty \leq x_0 < y_0 \leq \infty$ et les coefficients a, b satisfont les propriétés suivantes

$$a(x),\ b(x) \in L^\infty_{loc}(x_0, y_0; dx)$$

et

$$a(x) > 0 \quad dx - \text{a.e.}$$
$$\frac{1}{a(x)} \in L^\infty_{loc}(x_0, y_0; dx)$$

où $L^\infty_{loc}(x_0, y_0; dx)$ désigne l'espace des fonctions réelles Lebesgue mesurables essentiellement bornées par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout sous-intervalles compacts de (x_0, y_0). Soit $c \in (x_0, y_0)$ fixé et soit

$$s'(x) = e^{-\int_c^x \frac{b(t)}{a(t)}\, dt}$$

$$m'(x) = \frac{1}{a(x)} e^{\int_c^x \frac{b(t)}{a(t)}\, dt} \quad .$$

Leurs primitives s et m sont respectivement la fonction d'échelle et la fonction de vitesse de Feller. Dans la suite par m nous noterons aussi la mesure $m'(x)dx$. On voit que

$$\langle \mathcal{A}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{A}g\rangle_m \quad , \quad \forall f, g \in C_0^\infty(x_0, y_0)$$

où

$$\langle f, g\rangle_m = \int_{x_0}^{y_0} f(x)g(x)m'(x)\, dx \quad .$$

Pour $f \in C_0^\infty(x_0, y_0)$, nous écrivons $\mathcal{A}$ sous la forme:

$$\mathcal{A} = \frac{f''}{m's'} + \frac{1}{m'}\left(\frac{1}{s'}\right)' = \frac{1}{m'}\left(\frac{f'}{s'}\right)' = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds}f \quad .$$

Maintenant on regarde $(\mathcal{A}, C_0^\infty(x_0, y_0))$ comme un opérateur sur $L^\infty(x_0, y_0; m'dx) := L^\infty(m)$ doté de la topologie $\mathcal{C}(L^\infty(m), L^1(m))$. Nous avons une série de lemmes.

Lemme 5.5.1 *Soient $\mathcal{A}^* : \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \subset L^1(m) \to L^1(m)$ l'adjoint de $\mathcal{A}$ et $u \in L^1(m)$. Alors $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ si et seulement si*
i) u a une dx-version absolument continue $\tilde{u}$ tel que $\tilde{u}'$ est absolument continue;
ii) $g := a\tilde{u}'' + b\tilde{u}' = \frac{1}{m'}\left(\frac{\tilde{u}'}{s'}\right)' \in L^1(m)$.
Dans ce cas on a $\mathcal{A}^* u = g$.

Preuve. La suffisance résulte immédiatement par une intégration par parties. Dans la suite nous allons montrer la nécessité. Soit $x_0 < x_1 < y_1 < y_0$. L'espace des distributions aur (x_1, y_1) est noté par $\mathcal{D}'(x_1, y_1)$.
(i) on remarque que si $k \geq 1$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(x_1, y_1)$ satisfait $T_1^{(k)} = T_2^{(k)}$ (c'est-à-dire $\left\langle T_1, f^{(k)}\right\rangle = \left\langle T_2, f^{(k)}\right\rangle$, pour tout $f \in C_0^\infty(x_1, y_1)$), alors il existe un polynôme v tel que $T_1 = T_2 + v$.
(ii) Soit $u \in L^1(m)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ tel que

$$\mathcal{A}^* u = g \in L^1(m) \quad .$$

Puisque $\frac{u}{a} \in L^1_{loc}(x_0, y_0; dx)$, u, $\frac{u}{s'}$ alors $u\left(\frac{1}{s'}\right)' \in L^1_{loc}(x_0, y_0; dx)$. Pour $f \in C_0^\infty(x_1, y_1)$ on a

$$\int_{x_1}^{y_1} u\left(\frac{f'}{s'}\right)' dx = \int_{x_1}^{y_1} u\mathcal{A}fm'\, dx = \langle u, \mathcal{A}f\rangle_m = \langle \mathcal{A}^* u, f\rangle_m =$$
$$= \quad \langle g, f\rangle_m = \int_{x_1}^{y_1} fgm'\, dx \quad .$$

Comme

$$|f(x)| = \left|\int_{x_1}^{y_1} f'\, dx\right| \leq \int_{x_1}^{y_1} |f(x)|\, dx = \|f(x)\|_{L^1(x_1, y_1; dx)} \quad ,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{y_1} u\left[\frac{1}{s'}f'' + \left(\frac{1}{s'}\right)' f'\right]\, dx\right| &= \left|\int_{x_1}^{y_1} u\left(\frac{f'}{s'}\right)' \, dx\right| \leq \\ \leq \quad \left|\int_{x_1}^{y_1} fgm' \, dx\right| &\leq \left\|gm'\right\|_{L^1(x_0,y_0;dx)} \|f\|_{L^\infty(x_1,y_1;dx)} \leq \\ \leq \quad C\left\|f'\right\|_{L^1(x_1,y_1;dx)}\end{aligned}$$

où

$$C = \left\|gm'\right\|_{L^1(x_0,y_0;dx)}$$

ne dépend pas de f. Par conséquent la fonctionnelle linéaire

$$l_u(\eta) := \int_{x_1}^{y_1} u\left[\frac{1}{s'}\eta' + \left(\frac{1}{s'}\right)' \eta\right]\, dx$$

où $\eta \in \left\{f' \mid f \in C_0^\infty(x_1, y_1)\right\} \subset L^1(x_1, y_1; dx)$, est continue par rapport à la norme de $L^1(x_1, y_1; dx)$. Compte tenu du théorème de Hahn-Banach et que le dual de $L^1(x_1, y_1; dx)$ est $L^\infty(x_1, y_1; dx)$, on voit qu'il existe $v \in L^\infty(x_1, y_1; dx)$ tel que

$$l_u(\eta) := \int_{x_1}^{y_1} u\left[\frac{1}{s'}\eta' + \left(\frac{1}{s'}\right)' \eta\right]\, dx = \int_{x_1}^{y_1} v\eta\, dx$$

d'où il vient

$$\int_{x_1}^{y_1} u\frac{1}{s'}\eta' \, dx = \int_{x_1}^{y_1} \left[v - u\left(\frac{1}{s'}\right)'\right]\eta\, dx = \int_{x_1}^{y_1} h\eta' \, dx$$

où

$$h(x) = -\int_{x_1}^{x} \left[v(t) - u(t)\left(\frac{1}{s'}\right)'(t)\right]\, dt$$

est une fonction absolument continue sur (x_1, y_1). Compte tenu de (i) on voit qu'il existe un polynôme w tel que $u\frac{1}{s'} = h + w$ sur (x_1, y_1) au sens des distributions, donc $u\frac{1}{s'} = h + w$ p.p. sur (x_1, y_1).

(iii) Puisque $\frac{1}{s'} > 0$ est absolument continue, l'égalité $u = s'(h+w)$ montre que u a aussi une version absolument continue $\tilde{u} := s'(h+w)$.
(iv) Maintenant nous avons

$$\int_{x_1}^{y_1} fgm' \, dx = \int_{x_1}^{y_1} \tilde{u} \left(\frac{f'}{s'}\right)' \, dx = -\int_{x_1}^{y_1} \tilde{u}' \frac{1}{s'} f' \, dx$$

Donc

$$\left(\frac{\tilde{u}'}{s'}\right)' = gm' + \tilde{u}Vm' \in L^1(x_1, y_1; dx)$$

au sens des distributions. Alors $\frac{1}{s'}\tilde{u}'$ a une version absolument continue $\tilde{u}'$. Par conséquent

$$g = \frac{1}{m'} \left(\frac{\tilde{u}'}{s'}\right)' = a\tilde{u}'' + b\tilde{u}'$$

p.p. sur (x_1, y_1). Alors la preuve est finie parce que (x_1, y_1) est un sous-intervalle relativement compact arbitraire de (x_0, y_0). ■

Lemme 5.5.2 *Soit $h \in L^1(m)$ tel que*

$$(I - (\mathcal{A})^*)\, h = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{h'}{s'}\right)' = m'(1+V)h$$

au sens du lemme 5.5.1. Supposons que h est de classe C^1 tel que h' est absolument continue. Supposons que $c_1 \in (x_0, y_0)$, $h(c_1) > 0$ et $h'(c_1) > 0$ (respectivement < 0). Alors $h'(y) > 0$ (respectivement < 0) pour tout $y \in (c_1, y_0)$ (respectivement pour tout $y \in (x_0, c_1)$).

Preuve. Supposons que $h'(c_1) > 0$. Soit

$$\hat{y} = \sup \left\{ y \geq c_1 \;\middle|\; h'(z) > 0, \;\; \forall z \in [c_1, y) \right\} \quad .$$

Il est évident que $\hat{y} > c_1$. Alors, il vient

$$h(t) \geq h(c_1) > 0 \quad , \quad \forall t \in [c_1, \hat{y}].$$

Donc pour $y \in (c_1, y_0)$ on a

$$\frac{1}{s^{'}(y)}h^{'}(y) - \frac{1}{s^{'}(c_1)}h^{'}(c_1) = \int_{c_1}^{y} m^{'}(t)h(t)\,dt \quad .$$

Si $\hat{y} < y_0$, alors nous avons

$$\frac{1}{s^{'}(y)}h^{'}(y) = \frac{1}{s^{'}(c_1)}h^{'}(c_1) + \int_{c_1}^{\hat{y}} m^{'}(t)h(t)\,dt > \frac{1}{s^{'}(c_1)}h^{'}(c_1) > 0.$$

Il s'ensuit que $h^{'}(\hat{y}) > 0$, donc $h^{'} > 0$ sur $[\hat{y}, \hat{y} + \varepsilon]$ pour ε sufissament petit ce qui est contradictoire avec la définition de $\hat{y}$. ■

Lemme 5.5.3 *Il existe deux fonctions h_k, $k = 1, 2$ de classe C^1 strictement positives sur (x_0, y_0) tel que*
(i) pour $k = 1, 2$, $h_k^{'}$ est absolument continue et

$$\left(\frac{1}{s^{'}}h_h^{'}\right)^{'} = m^{'}h_k \quad , \quad p.p.;$$

(ii) $h_1^{'} > 0$ et $h_2^{'} < 0$ sur (x_0, y_0).

Preuve. La fonction h_2 a été construite par Feller [**Fe'52**, Lemma 9.1] pour le cas $a = 1$. Mais sa preuve reste encore valable dans notre situation considérée ici (voir [**WZ'06**, Lemma 4.7]). ■
Le résultat principal dans le cas uni-dimensionnel est donné dans le théorème suivant.

Théorème 5.5.4 *Soit $c \in (x_0, y_0)$. $(\mathcal{A}, C_0^\infty(x_0, y_0))$ est $L^\infty(m)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty(m), L^1(m))$ si et seulement si*

$$\int_c^{y_0} m^{'}(y)\,dy \int_c^{y} s^{'}(x)\,dx = +\infty$$

et

$$\int_{x_0}^{c} m^{'}(y)\,dy \int_y^{c} s^{'}(x)\,dx = +\infty$$

Preuve. Soit $c \in (x_0, y_0)$.
$\Leftarrow$ Supposons par contre que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(x_0,y_0))$ n'est pas $L^\infty(m)$-unique. Alors il existe $h \in L^1(m)$, $h \neq 0$ tel que

$$(I - \mathcal{A}^*)\, h = 0 \quad .$$

On peut supposer que $h \in C^1(x_0,y_0)$ et $h > 0$ sur un sous-intervalle $[x_1,y_1] \subset (x_0,y_0)$, où $x_1 < y_1$. On remarque que $h^{'} \neq 0$ sur (x_1,y_1).
Soit $c_1 \in (x_1,y_1)$ tel que $h^{'}(c_1) > 0$. Avec le lemme 5.5.2, il s'ensuit que

$$h(y) \geq h(c_1) > 0 \quad , \quad \forall y \in [c_1, y_0).$$

Alors nous avons:

$$\begin{aligned}
h(y) &= h(c_1) + \int_{c_1}^{y} h^{'}(x)\, dx = \\
&= h(c_1) + \int_{c_1}^{y} \left\{ \frac{h^{'}(c_1)}{s^{'}(c_1)} s^{'}(x) + s^{'}(x) \int_{c_1}^{x} m^{'}(t) h(t)\, dt \right\} dx > \\
&> \frac{h^{'}(c_1)}{s^{'}(c_1)} \int_{c_1}^{y} s^{'}(x)\, dx \quad .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{c_1}^{y_0} h(y) m^{'}(y)\, dy > \frac{h^{'}(c_1)}{s^{'}(c_1)} \int_{c_1}^{y_0} m^{'}(y)\, dy \int_{c_1}^{y} s^{'}(x)\, dx = +\infty$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $h \in L^1(m)$.
Si $h^{'}(c_1) < 0$ pour $c_1 \in (x_1,y_1)$, alors de façon analogue on peut prouver que

$$\int_{x_0}^{c_1} m^{'}(y) h(y)\, dy = +\infty \quad .$$

$\Rightarrow$ Supposons que

$$\int_{x_0}^{c} m^{'}(y)\, dy \int_{y}^{c} s^{'}(x)\, dx < \infty \quad .$$

En particulier on a

$$\int_{x_0}^{c} m'(y)\,dy < \infty$$

Avec le lemme 5.5.3 on voit qu'il existe une fonction $h_2 > 0$ tel que $h_2' < 0$ sur (x_0, y_0). Soit $h := h_2$. Donc $h > 0$ et $h' < 0$ sur (x_0, y_0). Pour $y \in (c, y_0)$ on a

$$0 \geq \frac{h'(y)}{s'(y)} = \frac{h'(c)}{s'(c)} + \int_{c}^{y} m'(t)h(t)\,dt$$

d'où il résulte que

$$\int_{c}^{y_0} m'(t)h(t)\,dt \leq -\frac{h'(c)}{s'(c)} < \infty \quad .$$

Par conséquent, h est une fonction m-intégrable tout près de y_0.
Soit maintenant $c_0 \in (x_0, c)$. Comme pour $x < c_0$ on a

$$\int_{x}^{c} m'(t)h(t)\,dt > \int_{c_0}^{c} m'(t)h(t)\,dt > 0 \quad ,$$

il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\frac{h'(c)}{s'(c)} > -(\lambda - 1)\int_{x}^{c} m'(t)h(t)\,dt \quad , \quad \forall x \in (x_0, c_0).$$

Alors pour $x < c_0$ on a

$$\frac{h'(x)}{s'(x)} = \frac{h'(c)}{s'(c)} - \int_{x}^{c} m'(t)h(t)\,dt \geq -\lambda \int_{x}^{c} m'(t)h(t)\,dt,$$

d'où pour tout $y < c_0$ on obtient

$$h(y) = h(c_0) - \int_{y}^{c_0} h'(x)\,dx \leq h(c_0) + \lambda \int_{y}^{c_0} s'(x)\left[\int_{x}^{c} m'(t)h(t)\,dt\right]\,dx \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} m^{'}(y)h(y) &\leq h(c_0)m^{'}(y) + \lambda m^{'}(y)\int_y^{c_0} s^{'}(x)\left[\int_x^{c} m^{'}(t)h(t)\,dt\right]\,dx \leq \\ &\leq h(c_0)m^{'}(y) + \lambda \int_{c_0}^{c} m^{'}(t)h(t)\,dt m^{'}y\int_y^{c_0} s^{'}(t)\,dt + \\ &+ \lambda m^{'}(y)\int s^{'}(x)\,dx \int_x^{c_0} m^{'}(t)h(t)\,dt \quad . \end{aligned}$$

Notons

$$\phi(z) = \int_z^{c_0} m^{'}(y)h(y)\,dy$$

et

$$K = h(c_0)\int_{x_0}^{c_0} m^{'}(y)\,dy + \lambda\int_{c_0}^{c} m^{'}(t)h(t)\,dt\int_{x_0}^{c_0} m^{'}y\left[\int_y^{c_0} s^{'}(t)\,dt\right]\,dy < \infty.$$

Alors pour $z < c_0$ on a

$$\begin{aligned} \phi(z) &\leq K + \lambda\int_z^{c_0} m^{'}(y)\left[\int_y^{c_0} s^{'}(x)\phi(x)\,dx\right]\,dy \leq \\ &\leq K + \lambda\int_z^{c_0} m^{'}(y)\left[\int_y^{c_0} s^{'}(x)\,dx\right]\phi(y)\,dy \quad . \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\phi(z) \leq K e^{\lambda\int_z^{c_0} m^{'}(y)\left[\int_y^{c_0} s^{'} x\,dx\right]\,dy}$$

d'où il s'ensuit que $\phi(x_0) < \infty$ et, par conséquent, h est m-intégrable tout près de x_0.

■

Nous allons considérer maintenant l'opérateur de Schrödinger multidimensionnel

$$\mathcal{A}f := \frac{1}{2}\Delta f + b\nabla f \quad , \quad \forall f \in C_0^{\infty}(I\!R^d)$$

où $d \geq 2$.

Théorème 5.5.5 *Supposons qu'il existe une fonction localement bornée mesurable*

$$\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

tel que

$$\frac{b(x)x}{|x|} \geq \beta(|x|) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ x \neq 0.$$

Soit

$$\tilde{\beta}(r) = \beta(r) + \frac{d-1}{2r}$$

et considérons l'opérateur uni-dimensionnel

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \tilde{\beta}(r)\frac{d}{dr} \quad .$$

Soient

$$s^{'}(x) = e^{-\int\limits_1^x 2\tilde{\beta}(t)\,dt}$$

et

$$m^{'}(x) = x^{d-1}e^{\int\limits_1^x 2\tilde{\beta}(t)\,dt}$$

les dérivées de la fonction d'échelle, respectivement de la fonction de vitesse de l'opérateur $\mathcal{A}_1$. Si

$$\int\limits_0^\infty m^{'}(y)\,dy \int\limits_1^y s^{'}(r)\,dr = +\infty \quad ,$$

alors $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ est $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$-unique.

Preuve. Avec le théorème 4.4.3, pour $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$-unicité de $\left(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ il est suffisant de prouver que si $u \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ vérifie

$$\langle u, (\mathcal{A} - I)\, f\rangle = 0 \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

alors $u = 0$, o'ù $\langle f, g\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^d} fg\,dx$. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ tel que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} u\left(\frac{1}{2}\Delta + b\nabla - I\right) f\,dx = 0 \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Compte tenu de [**Eb'97**, Lemma 2.2], on voit que $u \in L^\infty_{loc}$ et $\nabla u \in L^d_{loc} \subset L^2_{loc}$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans

$$\left\{ f \in L^2 \,\middle|\, \nabla f \in L^2 \text{ et le support de } f \text{ est compact} \right\} \quad ,$$

on obtient

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla f \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} u b \nabla f \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u f \, dx$$

pour tout $f \in H^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ avec un support compact. Maintenant on peut utiliser le raisonnement de Eberle [**Eb'97**, proof of Theorem 2.5, Step 2] pour prouver que (une inégalité de Kato)

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \nabla |u| \nabla f \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u| b \nabla f \, dx \geq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u| f \, dx$$

pour tout $f \in H^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ non-negative avec un support compact.

Soit

$$G(r) = \int\limits_{B(r)} |u| \, dx$$

où $B(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |x| \leq r \right\}$. G est absolument continue et

$$G^{'}(r) = \int\limits_{\partial B(r)} |u| \, d_\sigma x \quad , \quad \text{dr-a.e.}$$

où $d_\sigma r$ est la mesure sur la sphère $\partial B(r)$ (la frontière de $B(r)$). Maintenant pour tout $0 < r_1 < r_2$ considérons

$$f = \min \left\{ r_2 - r_1, (r_2 - |x|)^+ \right\}$$

et

$$\gamma(x) = \frac{x}{|x|} = \nabla |x| \quad .$$

Alors nous avons

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} \nabla |u| \nabla (r_2 - |x|) \, dx + \int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u| b(x) \nabla (r_2 - |x|) \, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u| (r_2 - |x|) \, dx \quad ,$$

d'où il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} \nabla|u|\gamma(x)\,dx - \int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u|b(x)\gamma(x)\,dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u|(r_2-|x|)\,dx + G(r_1)(r_2-r_1) \quad .$$

Puisque

$$\nabla|u|\gamma = div(|u|\gamma) - |u|div(\gamma) = div(|u|\gamma) - |u|\frac{d-1}{|x|} \quad ,$$

avec la formule de Gauss-Green on obtient

$$\int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} \nabla|u|\gamma(x)\,dx = G^{'}(r_2) - G^{'}(r_1) - (d-1)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}G^{'}(r)\,dr$$

pour $dr_1 \otimes dr_2$-p.p. $0 < r_1 < r_2$.

D'autre part, compte tenu de l'hypothèse et du théorème de Fubini on a

$$-\int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u|b(x)\gamma(x)\,dx \leq -\int\limits_{r_1}^{r_2} G^{'}(r)\beta(r)\,dr$$

et

$$\int\limits_{B(r_2)-B(r_1)} |u|(r_2-|x|)\,dx = \int\limits_{r_1}^{r_2}(r_2-r)G^{'}(r)\,dr =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} G^{'}(r)\int\limits_{r}^{r_2} dt\,dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{r_1}^{r} G^{'}(t)\,dt.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\left[G^{'}(r_2) - G^{'}(r_1)\right] - \int\limits_{r_1}^{r_2}\tilde{\beta}(r)G^{'}(r)\,dr \geq \int\limits_{r_1}^{r_2} G(r)dr$$

pour $dr_1 \otimes dr_2$-p.p. $0 < r_1 < r_2$. Donc

$$\mathcal{A}_1^- := \frac{1}{2}G^{''}(r) - \tilde{\beta}G^{'}(r) \geq G(r)$$

au sens des distributions sur $(0, \infty)$.
On remarque que le signe de $\tilde{\beta}$ dans $\mathcal{A}_1^-$ est negative, opposé au signe de l'opérateur $\mathcal{A}_1$ et les dérivées des fonctions d'échelle respectivement de vitesse de $\mathcal{A}_1^-$ sont exactement $\frac{m'(x)}{2}$ et respectivement $2s'(x)$. Donc on peut écrire

$$\left(\frac{G'}{m'}\right)' \geq s' G(r) \quad .$$

Supposons par contre que $u \neq 0$. Donc il existe $r_0 > 0$ tel que $G(r_0) > 0$. Alors pour dx-p.p. $r > r_0$ on a

$$G'(r) \geq m'(r) \int r_0{}^r s'(t) G(t)\, dt \geq m'(r) G(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} s'(t)\, dt$$

d'où il s'ensuit que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |u|\, dx = G(\infty) \geq G(r_0) \int\limits_{r_0}^{\infty} m'(r)\, dr \int\limits_{r_0}^{r} s'(t)\, dt = \infty \quad ,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que $u \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. ■

Corollaire 5.5.6 *Dans les hypothèses du théorème 5.5.5, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ *l'équation de Fokker-Planck*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) - div(\, bu\,) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

a une $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$*-unique solution faible.*

Preuve. L'assertion de l'énoncé résulte tout de suite avec le théorème 4.1.1 et le théorème 5.5.5. ■

5.6 $L^\infty(M,dx)$-unicité de l'opérateur de Schrödinger généralisé sur une variété riemannienne complète

Soit M une variété riemannienne complète avec la messure dx. Considérons l'opérateur de Schrödinger généralisé (ou l'opérateur de diffusion de Nelson, voir [**Wu'99**])

$$\mathcal{A} = \Delta - \nabla\phi\cdot\nabla$$

avec le domaine $C_0^\infty(M)$ et la messure invariante $d\mu_\phi = e^{-\phi(x)}dx$, où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et ∇ est l'opérateur gradient sur M et $\phi \in C^\infty(M)$. L'étude de cet opérateur est très important puisque il est bien connu que $\mathcal{A} = \Delta - \nabla\phi\cdot\nabla$ consideré comme un opérateur symétrique dans $L^2(M, e^{-\phi(x)}dx)$ est unitaire équivalent avec l'opérateur de Schrödinger $H = \Delta - V$, où $V = \frac{1}{4}|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}\Delta\phi$, consideré dans $L^2(M,dx)$. Cet isomorphisme unitaire $U : L^2(M, e^{-\phi(x)}dx) \to L^2(M,dx)$ est donné par $Uf = e^{-\frac{\phi}{2}}f$. Dans les casses lesquels $M = I\!R^d$ ou $M = D$ est un domaine ouvert de $I\!R^d$ pour l'opérateur de diffusion $\mathcal{A} = \Delta + 2\frac{\nabla\phi}{\phi}\cdot\nabla$, $L^1(M,\phi^2 dx)$-unicité a été étudiée par Liskevitch [**Li'99**], Stannat [**St'99**] et Wu [**Wu'99**].

Dans cette section nous étudions $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$-unicité de l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ utilisant un résultat très récent de Li [**Li'05**] concernant le théorème de Liouville dans une variété riemannienne complète. Nous rappelons que pour tout $m \geq n = dim(M)$, le 2-tensor symétrique

$$Ric_{m,n}(\mathcal{A})(x) = Ric(x) + \nabla^2\phi(x) - \frac{\nabla\phi(x)\otimes\nabla\phi(x)}{m-n} \quad , \quad \forall x \in M$$

s'appelle *la courbure de Bakry-Emery Ricci* de l'opérateur $\mathcal{A}$ (voir [**BE'85**]), avec la convention $m = n$ si et seulement si $\mathcal{A} = \Delta$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant (voir [**Le'06**])

Théorème 5.6.1 *Soit M une variété riemannienne complète, $\phi \in C^2(M)$. Supposons qu'il existe les constantes $m > n$ et $C > 0$ telles que*

$$Ric_{m,n}(\mathcal{A})(x) \geq -C\left(1 + d^2(x,0)\right) \quad , \quad \forall x \in M$$

où $d(x,0)$ désigne la distance de x à $0 \in M$. Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$.

Preuve. Prouvons le théorème en deux étapes.

Etape 1 $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est un pré-générateur sur $\left(L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx), \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)\right)$.

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien à valeur dans M. L'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sqrt{2}dW_t - \nabla(X_t)dt$$

a une unique solution martingale $(X_t)_{0\leq t<\tau_e}$, où τ_e est le temps d'explosion. Le semi-groupe de transition $\{P_t\}_{t\geq 0}$ est donné par la formule de Feynman-Kac

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x f(X_t) 1_{[t<\tau_e]} \quad , \quad f \in C_0^\infty(M)$$

Puisque $\{P_t\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $(L^1(M, e^{-\phi(x)}dx), \| \|_1)$, il est aussi un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)$. Avec la formule de Ito, pour tout $f \in C_0^\infty(M)$ il s'ensuit que

$$f(X_t) - f(x) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_t)ds$$

est une martingale locale. Comme elle est bornée sur les intervales bornés, c'est une vraie martingale. En prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_x$ dans la dernière formule, on trouve que

$$P_t f(x) - f(x) = \int_0^t P_s \mathcal{A} f(x) ds \quad , \quad \forall t \geq 0$$

qui signifie que f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}$ de $\{P_t\}_{t\geq 0}$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_{(\infty)}$ étend $\mathcal{A}$.

Etape 2 $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$-unique par rapport à la topologie $\mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right)$.

Avec le théorème 4.4.3, il s'ensuit que l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$-unique si et seulement si pour $\lambda > \omega$, l'image $(\mathcal{A} - \lambda I)\left(C_0^\infty(M)\right)$ est dense dans $(L^\infty, \mathcal{C}\left(L^\infty, L^1\right))$. Il est suffisant de prouver que si $u \in L^1(M, e^{-\phi(x)}dx)$ satisfait $(\mathcal{A} - \lambda I)u = 0$ au sens des distributions, alorsn $u = 0$.

Soit $u \in L^1(M, e^{-\phi(x)}dx)$ tel que

$$(\mathcal{A} - I)u = 0$$

au sens des distributions, c'est-à-dire

$$\langle u, (\mathcal{A}-I)f\rangle = 0 \quad , \quad \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Puisque

$$\int_M u\Delta f\, e^{-\phi(x)}dx - \int_M u\nabla\phi\nabla f\, e^{-\phi(x)}dx = \int_M uf\, e^{-\phi(x)}dx,$$

on obtient

$$-\int_M \nabla u\nabla f\, e^{-\phi(x)}dx - \int_M u\nabla\phi\nabla f\, e^{-\phi(x)}dx = \int_M uf\, e^{-\phi(x)}dx$$

pour tout $f \in H^{1,2}(M, e^{-\phi(x)}dx)$ non-negative avec un support compact. Maintenant on peut utiliser le raisonnement de EBERLE [**Eb'97**, proof of Theorem 2.5, Step 2] pour prouver que (une inégalité de Kato)

$$-\int_M \nabla|u|\nabla f\, e^{-\phi(x)}dx - \int_M |u|\nabla\phi\nabla f\, e^{-\phi(x)}dx \geq \int_M |u|f\, e^{-\phi(x)}dx$$

pour tout $f \in H^{1,2}(M, e^{-\phi(x)}dx)$ non-negative avec un support compact, ce qui est équivalent avec

$$\int_M |u|\mathcal{A}f\, e^{-\phi(x)}dx \geq \int_M |u|f\, e^{-\phi(x)}dx \geq 0 \quad .$$

Par conséquent $|u|$ est une fonction $\mathcal{A}$-ssous-harmonique. Avec [**Li'05**, Theorem 7.1], on voit que $|u|$ est constante, donc $u = 0$. Avec le théorème 4.4.3 on obtient que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(M))$ est $L^\infty(M, e^{-\phi(x)}dx)$-unique. ■

Corollaire 5.6.2 *Dans les hypothèses du théorème 5.6.1, pour tout $h \in L^1(M,dx)$, l'équation de diffusion de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = \mathcal{A}^* u(t) \\ u(0) = h \end{cases}$$

a une $L^1(M,dx)$-unique solution faible.

Preuve. L'affirmation résulte avec le théorème 4.4.3 et le théorème 5.6.1. ■

Bibliographie

[**Ah'91**] Ahmed, N.U. *Semigroup theory with application to systems and control.* Logman Scientific & Tehnical, London, 1991.

[**AM'91**] Albeverio, S., Ma, Z.M. Perturbation of Dirichlet form: lower boundedness, closability and form cores. *J. Funct. Anal.*, **99**(1991), 332-356.

[**ABR'89**] Albeverio, S., Brasche, J., Röckner, M. Dirichlet forms and generalized Schrödinger operators. *Schrödinger Operators* (H. Holden et A. Jensen, Eds.), Lect. Notes Math., Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.

[**AS'82**] Aizenman, M., Simon, B. Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger Operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**(1982), 209-271.

[**Ar'87**] Arendt, W. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. *Israel J. Math.*, (3)**59**(1987), 327-352.

[**Ar'86**] Arendt, W. The abstract Cauchy problem, special semigroups and perturbation. *One Parameter Semigroups of Positive Operators* (R. Nagel, Eds.), Lect. Notes in Math., **1184**, Springer, Berlin, 1986.

[**Ba'74**] Babalola, V.A. Semigroups of operators on locally convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc., **199**(1974), 163-179.

[**Ba'76**] Barbu, V. *Nonliniar semigroups and differential equations in Banach Spaces.* Editura Academiei R.S.R. Bucureşti and Noordhoff International Publishing Leyden, 1976.

[BE'85] BAKRY, D., EMERY, M. *Diffusion hypercontractives.* Lect. Notes in Math., vol. 1123, Springer-Verlag, Berlin- New York, 1985, 177-206.

[BH'86] BLIEDTNER, J., HANSEN, W. *Potential Theory.* Springer-Verlg, Berlin, 1986.

[Bo'94] BOBROWSKI, A. Integrated Semigroups and the Trotter-Kato Theorem. *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, (4)**42**(1994), 297-304.

[BW'92] BUSENBERG, S., WU, B. Covergence Theorems for Integrated Semigroups. *Differential Integral Equations*, (3)**5**(1992), 509-520.

[BB'67] BUTZER, P.L., BERENS,H. *Semi-Groups of Operators and Approximations.* Springer Verlag, New York Inc., 1967.

[Ca'01] CASSIER, G. Semigroups in finite von Neumann algebras. *Operator Theory: Adv. and Appl.*, **127**(2001), 145-162.

[Ca'85] CARMONA, R. Probabilistic construction of Nelson processes. *Probabilistic Methods in Math. Phys.* (K. Itô and N. Ikeda, Eds.), Proc. of the Taniguchi International Symp., Katata and Kyoto, 1985, 55-82.

[Ce'94] CERRAI, S. A Hille-Yosida theorem for weakly continuous semigroups. *Semigroups Forum*, **49**(1994), 349-367.

[Ch'70] CHILANA, A.K. Relatively continuous linear operators and some perturbation results. *J. London Math. Soc.*, **2**(1970), 225-231.

[Ch'85] CHOE, Y.H. C_0-semigroups on Locally Convex Space. *J. Math. Anal. Appl.*, **106**(1985), 293-320.

[CHADP'87] CLÉMENT, P.H., HEIJMANS, H.J.A.M., ANGENENT, S., VAN DUIJN, C.J., DE PATGER, B. *One-parameter Semigroups.* CWI Monograph 5, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987.

[**DCLLPS'89**] Dautray, R., Cessenat, M., Ledanois, G., Lions, P.L., Pardoux, E., Sentis, R. *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique.* Eyrolles, Paris, 1989.

[**Da'80**] Davies, E.B. *One-parameter semigroups.* Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[**Da'85**] Davies, E.B. L^1-properties of second order elliptic operators. *Bull. London Math. Soc.*, **17**(1985), 417-436.

[**DL'89**] de Laubenfels, R. Polynomials of generators of Integrated Semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (1)**107**(1989), 197-204.

[**De'74**] Dembart, B. On the Theory of Semigroups of Operators on Locally Convex Spaces. *J.Funct. Anal.*, **16**(1974), 123-160.

[**Dj'97**] Djellout, H. *Unicité dans L^p d'opérateurs de Nelson.* Prépublication, 1997.

[**DS'67**] Dunford, N., Schwartz, J.T. *Linear Operators. Part.I.* Interscience Publishers, Inc. New York, Wiley, 1967.

[**Dy'65**] Dynkin, E.B. *Markov Processes.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 121,122, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.

[**Eb'97**] Eberle, A. *Uniquenees and non-uniqueness of singular diffusion operators.* Thèse de Doctorat de l'Université de Bielefeld, 1997.

[**EK'86**] Ethier, S.N., Kurtz, T.G. *Markov processes. Characterization and convergence.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

[**Fa'68**] Fattorini, H.O. Ordinary differential equations in linear topological spaces. *J. Diff. Eq.*, **5**(1968), 72-105.

[**Fe'52**] Feller, W. The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. *Ann. Math.*, (3)**55**(1952), 468-519.

[**Fe'53-1**] FELLER, W. Semi-goups of transformations in general weak topologies. *Ann. Math.*, **57**(1953), 287-308.

[**Fe'53-2**] FELLER, W. On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. *Ann. of Math.*, **58**(1953), 166-174.

[**GHL'90**] GALLOT, S., HULIN, D., LAFONTAINE, J. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[**Ga'81**] GAŞPAR, D. *Analiza funcţională.* Ed. Facla, Timişoara, 1981.

[**GW'74**] GAŞPAR, D., WESTPHAL, U. Über den Kogenerator einer Kontractionshalbgruppe. *Analele Universităţii din Timişoara*, **1**(1974), 43-55.

[**Hi'91-1**] HIEBER, M. Laplace Transforms and α-Times Integrated Semigroups. *Forum Math.*, **3**(1991), 595-612.

[**Hi'91-2**] HIEBER, M. Integrated Semigroups and the Cauchy Problems for Systems in L^p Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **162**(1991), 300-308.

[**Hi'36**] HILLE, E. Notes on linear transformation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39**(1936), 131-153.

[**Hi'48**] HILLE, E. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., New York, 1948.

[**Hi'52**] HILLE, E. A note on Cauchy's problem. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **25**(1952, 56-68.

[**HP'57**] HILLE, E., PHILLIPS, R.S. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957.

[**Je'86**] JEFFERIES, B. Weakly integrable semigroups on locally convex spaces. *J. Funct. Anal.*, **66**(1986), 347-364.

[**Je'87**] JEFFERIES, B. The generation of weakly integrable semigroups. *J. Func. Anal.*, **73**(1987), 195-215.

[**Ka'84**] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[**Ka'72**] KATO, T. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel J. Math.*, **13**(1972), 135-148.

[**KH'89**] KELLERMAN, H., HIEBER, M. Integrated Semigroups. *J. Funct. Anal.*, **84**(1989), 160-180.

[**Ko'64**] KOMATSU, H. Semigroups of operators in locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **16**(1964), 230-262.

[**Kö'69**] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 159, Springer, Berlin, 1969.

[**Kö'79**] KÖTHE, G. *Topological Vector Spaces.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 237, Springer, Berlin, 1979.

[**Kõ'68**] KÕMURA, T. Semigroups of Operators in Locally Convex Spaces. *J. Funt. Anal.*, **2**(1968), 258-296.

[**Le'03**] LEMLE, L.D. *La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus.* Mémoire de recherche. L'Institut Girard Desargues, Lyon, **8**(2003), 1-136.

[**Le'05**] LEMLE, L.D. Une étude comparative concernant les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés. *Lect. Mat.*, **26**(2005), 27-88.

[**Le'06**] LEMLE, L.D. L^∞-uniqueness of Schrödinger operators on a Riemannian manifold. Accepté pour publication dans *Differential Geometry-Dynamical System*

[**LG'06**] LEMLE, L.D., GAŞPAR, D. A perturbation theorem for adjoint C_0-semigroups on the dual of a locally convex space. In preparation

[**LW'06**] LEMLE, L.D., WU, L. Uniqueness of a pre-generator for C_0-semigroup on a general locally convex vector space. Pré-publication, 2006.

[**Li'84**] Li, P. Uniqueness of L^1 solution for the Laplace equation and the heat equation on Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.*, **20**(1984), 447-457.

[**Li'05**] Li, X.D. Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds. *J. Math. Pures Appl.*, **84**(2005), 1295-1361.

[**Li'99**] Liskevitch, V. On the uniqueness problem for Dirichlet operators. *J. Funct. Anal.*, **162**(1999), 1-13.

[**MZ'84**] Meyer, P.A., Zheng, W.A. Construction de processus de Nelson reversible. *Lect. Notes Math.*, **1123**(1984), 12-26.

[**MPV'97**] Mijatović,M., Pilipović, S., Vajzović, F. α-Times Integrated Semigroups ($\alpha \in \mathbf{R}^+$). *J. Math. Anal. Appl.*, **210**(1997), 790-803.

[**Mi'52**] Miyadera, I. Generation of strongly continuous semi-groups of operators. *Tohoku Math. J.*, **4**(1952), 109-114.

[**Mi'56**] Miyadera, I. On the representation theorem by Laplace transformation of vector-valued functions. *Tohoku Math. J.*, **8**(1956), 170-180.

[**Mi'59**] Miyadera, I. Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations. *Tôhocu Math. J.*, **11**(1959), 162-183.

[**Mo'69**] Moore, R.T. Banach algebras of operators in locally convex spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**(1969), 68-73.

[**Na'35**] Nathan, D.S. One parameter groups of transformations in abstract vector spaces. *Duke Math. J.*, **1**(1935), 518-526.

[**Ne'88**] Neubrander, F Integrated Semigroups and their Applications to the Abstract Cauchy Problem. *Pacific J. Math.*, (1)**135**(1988), 111-155.

[**Ni'93**] Nicaise, S. The Hille-Yosida and Trotter-Kato Theorems for Integrated Semigroups. *J. Math. Anal. Appl.*, **180**(1993),303-316.

[**Õu'72**] Õuchi, S. Semi-groups of operators in locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **25**(1973), 265-276.

[**Pa'83-1**] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[**PC'98**] Peng, J., Chung, S.K. Laplace Transform and Generators of Semigroups of Operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (8)**126**(1998), 2407-2416.

[**Ph'52**] Phillips, R.S. On the generation of semi-groups of linear operators. *Pacific J.Math.*, **2**(1952), 393-415.

[**RS'75**] Reed, M., Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, II, Fourier Analysis, Self-adjointness.* Academic Press, New York, 1975.

[**Rö'98**] Röckner, M. *L^p-analysis of finite and infinite dimensional diffusion operators.* Lect. Notes in Math., **1715**(1998), 65-116.

[**Sc'71**] Schaefer, H.H. *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1971.

[**Sch'71**] Schechter, M. *Spectra of partial differential operators.* North-Holland, Amsterdam, 1971.

[**Sch'58**] Schwartz, L. *Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups.* Tata Institute of Fundamantal Research, 1958.

[**Si'82**] Simon, B. Schrödinger Semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc.* (3)**7**(1982), 447-526.

[**St'99**] Stannat, W. (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1: existence, uniqueness and associated Markov processes. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa*, C1 Sci. **28**(1999), 99-140.

[**St'83**] STRICHARTZ, R.S. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.*, **52**(1983), 48-79.

[**SV'79**] STROOCK, D.W., VARADHAN, S.R.S. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[**Th'90**] THIEME, H. Integrated Semigroups and Integrated Solutions to Abstract Cauchy Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, **152**(1990), 416-447.

[**Vr'01**] VRABIE,I.I. *Semigrupuri de operatori liniari şi aplicaţii.* Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2001.

[**Wi'34**] WIDDER, D.V. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**(1934), 107-200.

[**Wi'71**] WIDDER, D.V. *An introduction to Transform Theory.* Academic Press, New York, 1971.

[**Wi'85**] WIELENS, N. On the essential self-adjointness of generalized Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, **61**(1985), 98-115.

[**Wu'98**] WU, L. Uniqueness of Schrödinger Operators Restricted in a Domain. *J. Funct. Anal.*, (2)**153**(1998), 276-319.

[**Wu'99**] WU, L. Uniqueness of Nelson's diffusions. *Probab. Theory Relat. Fields*, **114**(1999), 549-585.

[**Wu'01**] WU, L. L^p-Uniqueness of Schrödinger Operators and the Capacitary Positive Improving Property. *J. Funct. Anal.*, **182**(2001), 51-80.

[**WZ'02**] WU, L., ZHANG, Y. Existence and uniqueness of C_0-semigroup in L^∞: a new topological approach. *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, **334**(2002), 699-704.

[**WZ'06**] WU, L., ZHANG, Y. A new topological approach to the L^∞-uniqueness of operators and the L^1-uniqueness of Fokker-Planck equations. *J. Funct. Anal.*, **241**(2006), 557-610.

[**XL'96**] XIAO, T.J., LIANG, J. Widder-Arendt theorem and integrated semigroups in locally convex space. *Sci. China. Ser.*, (11)**39**(1996), 1121-1130.

[**Yo'36**] YOSIDA, K. On the group embeded in a matriceal complete ring. *Japan J. Math.*, **13** (1936), 7-26.

[**Yo'48**] YOSIDA, K. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. *J. Math. Soc. Japan*, **1**(1948), 15-21.

[**Yo'57**] YOSIDA, K. *Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[**Yo'71**] YOSIDA, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, New York, 1971.

[**Za'60**] ZAIDMAN, S. Sur un théorème de I. Miyadera concernant la représentation des fonction vectorielles par des intégrales de Laplace. *Tohoku Math. J.*, **1**(1960), 12-47.